NÚMEROS REALES PARA INGENIERÍA

Autor

Daniel Alberto Valderrama Martínez

UNIMINUTO
Corporación Universitaria Minuto de Dios
Educación de calidad al alcance de todos
Vigilada MinEducación

NÚMEROS REALES PARA INGENIERÍA

Daniel Alberto Valderrama Martínez

UNIMINUTO
Corporación Universitaria Minuto de Dios
Educación de calidad al alcance de todos
Vigilada MinEducación

UNIMINUTO
Corporación Universitaria Minuto de Dios
Educación de calidad al alcance de todos

Presidente del Consejo de Fundadores
P. Diego Jaramillo Cuartas, cjm

Rector General Corporación Universitaria Minuto de Dios – UNIMINUTO
P. Harold Castilla Devoz, cjm

Vicerrectora General Académica
Stéphanie Lavaux

Subdirectora Centro Editorial UNIMINUTO
Rocío del Pilar Montoya

Rector UNIMINUTO Cundinamarca
Jairo Enrique Cortés Barrera

Vicerrector Académico UNIMINUTO Cundinamarca
Jhensus Elías Carvajal Gómez

Directora de Investigación UNIMINUTO Cundinamarca
Jenifer Paola Garza Puentes

Coordinadora de publicaciones UNIMINUTO Cundinamarca
Diana Carolina Díaz Barbosa

Valderrama Martínez, Daniel Alberto

Números reales para ingeniería / Daniel Alberto Valderrama Martínez. Bogotá: Corporación Universitaria Minuto de Dios - UNIMINUTO, 2023.

ISBN: 978-958-763-619-2

137p. : il, tab, map.

1.Matemáticas -- Enseñanza superior 2.Número racionales -- Enseñanza 3.Números naturales -- Enseñanza 4.Educación superior 5.Ingeniería -- Enseñanza superior.

CDD: 510.711 V15n BRGH Registro Catálogo Uniminuto No. 104783

Archivo descargable en MARC a través del link: https://tinyurl.com/bib104783

Números reales para ingeniería

Autor:
Daniel Alberto Valderrama Martínez

Coordinación editorial:
Diana Carolina Díaz Barbosa

Corrección de estilo:
Elvira Lucía Torres Barrera

Diseño y diagramación:
Andrea Sarmiento Bohórquez

ISBN: 978-958-763-619-2

DOI: https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Primera edición digital: 2023

Corporación Universitaria Minuto de Dios – UNIMINUTO

Calle 81B No.72B-70

Teléfono: +57(1) 291 6520 Ext. 6012

Bogotá, D. C., - Colombia

Proceso de arbitraje doble ciego:

Recibido del manuscrito: enero 2022

Evaluado: octubre 2022

Ajustado por autor: enero 2023

Aprobado: febrero 2023

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

> Para aquellos que no conocen las matemáticas, es difícil sentir la belleza de la naturaleza. Si quieres apreciarla, es necesario aprender el lenguaje en el que habla.
>
> *Richard Feynman*

En diferentes escenarios cotidianos se encuentra inmerso el maravilloso mundo de los números reales, con los cuales es posible entender, codificar, traducir e interpretar diversas situaciones. Este conjunto numérico es la base imprescindible en el estudio del cálculo, el álgebra, la probabilidad, la estadística y cualquier otra disciplina que indirectamente los requiera para su comprensión.

El autor de esta obra muestra y ejemplifica múltiples aplicaciones de los números reales en la ingeniería, disciplina en la cual son necesarios los fundamentos matemáticos para la solución de situaciones concretas, sin que esto conlleve dejar de lado el rigor y la estructura apropiada para el procesamiento de la información en cada uno de los sistemas numéricos abordados.

Se trata de un texto, cuyo propósito es generar bases sólidas para estudios posteriores del cálculo y el álgebra. Por ello, se ha buscado articular coherente y secuencialmente las aplicaciones asociadas a las distintas ramas de la ingeniería. Para ello, en algunos casos, el autor parte de situaciones específicas para motivar la introducción de varios conceptos, mientas que, en otros, aplica determinado objeto matemático en diversos contextos. Esto permite que, a partir situaciones concretas, el estudiante dé significado a los conceptos trabajados.

Así, se presenta un panorama amplio acerca de los números reales, retomando experiencias e interacciones con procesos numéricos desde escenarios escolares, en donde los naturales fueron los protagonistas de historias, planteamientos y lenguajes para la solución de diferentes situaciones problema. Claro está que no se hace hincapié en la demostración de las proposiciones, axiomas o teoremas, ni se les asigna un lugar predominante en el desarrollo del libro, pues lo que se pretende es dotar al estudiante con las herramientas necesarias para comprender cada una de las construcciones de los conjuntos numéricos, así como sus propiedades y características, basándose para ello en la historia de la matemática como recurso didáctico.

El número real se aborda en esta obra desde dos perspectivas fundamentales: lo infinito contable y lo infinito no numerable, factores de gran importancia para la comprensión del conjunto de los números reales. Asimismo, se presentan varias definiciones y ejemplos que ayudarán al estudiante a asociar cada concepto con su aplicabilidad en múltiples contextos y se explica cómo utilizar el *software* en línea WolframAlpha para realizar algunos cálculos como apoyo a los procesos desarrollados en el libro.

Por todo lo anterior, este libro contiene los factores requeridos para dotar de significado al número real, sin olvidar las aplicaciones y usos que se les puede dar en las distintas ramas de la ingeniería, en diversos contextos y escenarios en los que el futuro profesional tendrá que interactuar.

Liliana Paola Cruz Becerra
Docente de la Corporación Universitaria Minuto de Dios - UNIMINUTO
Sede Cundinamarca, Centro Regional Madrid

SOBRE EL AUTOR

Daniel Alberto Valderrama Martínez

Licenciado en matemáticas, especialista en Educación Matemática, magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, doctorando en Educación Matemática. Profesor de la Corporación Universitaria Minuto de Dios – UNIMINUTO.

Últimas publicaciones: «Competencias matemáticas: una mirada desde las estrategias de enseñanza en educación a distancia», artículo publicado en la revista *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias* (vol. 16, n.º 2, mayo de 2021, pp. 382-398, DOI: 10.14483/23464712.16167).

INTRODUCCIÓN

Existen diversos métodos para introducir al conjunto de los números reales. En algunos de ellos, los números reales se construyen a partir de un conjunto de axiomas, con base en los cuales se elabora toda una teoría. En otros, el principio fundamental parte del hecho de que el conjunto de los números reales es la unión de dos conjuntos infinitos, como el de los números racionales y el de los números irracionales. A su vez, se da por hecho que el conjunto de los números racionales está determinado por la unión de números enteros y las fracciones.

En este libro se ha buscado llevar a cabo la construcción de los números reales a partir de un contexto histórico que haga evidentes los procesos de transformación e ideas que surgieron para concebir la noción de un conjunto infinito no numerable. La construcción de los números reales a partir de los números naturales fue una tarea desarrollada por varios matemáticos a lo largo de la historia y que, sin duda, constituye un método constructivo, práctico y dinámico para dotar de significado al número real, necesario para la resolución de múltiples problemas.

Los números reales son el pilar de la fundamentación matemática requerida para el estudio del cálculo, el álgebra, la estadística y la probabilidad, entre otras. Es importante recordar que el cálculo, por ejemplo, tiene profundas raíces en problemas físicos y que gran parte de su potencia y belleza derivan de la concepción de diferencias muy pequeñas entre dos cantidades, número reales tan cercanos a otro como se deseen.

El libro *Números reales para ingeniería* es una combinación entre un desarrollo histórico, teórico y práctico, en un intento por establecer un equilibrio entre las tres tendencias. Se hace uso de la historia y los principios que permitieron al matemático establecer en algún momento el rigor necesario para que los números reales constituyeran una teoría libre de contradicción y que fuese consistente.

Se realizan pocas demostraciones, aunque se considera la prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ como parte esencial en el desarrollo del capítulo 2, concerniente a los números irracionales, con el propósito de brindar al estudiante herramientas que le permitan deducir la importancia de una prueba en matemáticas. Con frecuencia, las definiciones y proposiciones se generan de manera natural apelando a la intuición. Aunque estas discusiones puedan ser suficientes para el estudiante, se deja el camino abierto para llevar a cabo de forma autónoma otras consultas que le permitan profundizar en los temas abordados.

La disposición de los dos capítulos del libro ha sido sugerida por del desarrollo histórico que fundamenta la teoría matemática expuesta. Por ejemplo, se estudian los números racionales antes que los irracionales porque se requieren para la construcción del número irracional concebida por Dedekind. Además, es el mejor camino para comprender la conexión entre el número real y los números racionales e irracionales.

Por otra parte, el libro hace evidente la necesidad de fundamentar las matemáticas a partir de los números naturales y las razones que llevaron a aritmetizar el análisis. Por tal motivo se parte el estudio riguroso de los números naturales, para luego construir el conjunto de los números enteros y, partiendo de las nociones de la teoría de conjuntos, se da paso a la construcción de los números racionales, la cual funciona a su vez como pilar para definir el conjunto de los números reales. De esta manera, se construyen las bases necesarias para que la transición de los números racionales a los irracionales se realice de la forma más natural posible.

Se han añadido aplicaciones en las que se utiliza el *software* WolframAlpha, que permite hacer algunos cálculos con números reales grandes, simplificando en gran medida los procesos. Los recursos de programa computacional se hacen evidentes a lo largo del libro, en particular en el desarrollo del capítulo 1.

RESUMEN

El libro *Números reales para ingeniería*, producto de la investigación en el contexto educativo, se orienta al desarrollo de competencias matemáticas referentes a la comprensión y dotación de sentido del número real en los estudiantes de ingeniería, mediante la construcción de los números reales a partir del conjunto de los números naturales y del uso extensivo de algunos conceptos de la teoría de conjuntos.

En este libro se utiliza a la historia de la matemática como recurso didáctico, para motivar el estudio de los orígenes y significados de diversos conceptos que, a través del tiempo, aportaron al estudio y desarrollo de lo que actualmente se conoce como el conjunto de los números reales.

Con ello, se espera contribuir a que los estudiantes, apoyados en el uso de herramientas tecnológicas como WolframAlpha, logren dar significado al concepto de número real y, de este modo, comprendan las diversas aplicaciones de este concepto en la ingeniería.

Palabras clave: números reales, competencias matemáticas, ingeniería, historia de las matemáticas.

¿Cómo citar este libro? / How to cite this work?

IEEE

D. A. Valderrama Martínez, *Números reales para ingeniería*. Bogotá: Corporación Universitaria Minuto de Dios - UNIMINUTO, 2023, doi: https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2 .

Chicago

Valderrama Martínez, Daniel Alberto. *Números reales para ingeniería*. Bogotá: Corporación Universitaria Minuto de Dios - UNIMINUTO, 2023. doi: https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

APA

Valderrama Martínez, D. A. (2023). *Números reales para ingeniería*. Corporación Universitaria Minuto de Dios - UNIMINUTO. https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

CAPÍTULO 1.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

El conjunto de los números racionales comprende todos aquellos cocientes entre dos números enteros siempre que el divisor sea distinto de cero. Se distinguen en particular algunas representaciones familiares para el estudiante: la fraccionaria y la decimal, cada una de las cuales representa una magnitud y da sentido a un problema específico. Los números racionales son de uso obligatorio en la ingeniería, puesto que al medir, relacionar y asociar cantidades conmensurables (se pueden disponer en razón a una unidad de medida específica) permiten la solución de múltiples situaciones. Por consiguiente, estos números constituyen un instrumento indispensable en la formación profesional del futuro ingeniero.

A continuación, se construyen los conjuntos de los números enteros y números racionales a partir de los números naturales, en un esfuerzo por fundamentar las matemáticas sustrayendo los objetos matemáticos de una existencia geométrica intuitiva y confiriendo un significado a cada uno de estos objetos. Para ello, se utilizan las herramientas que brinda la historia de las matemáticas y, dentro de ella, en particular, la evolución histórica del concepto de número y la teoría de conjuntos.

El origen del número y los sistemas de numeración

Para los humanos primitivos, la necesidad de contar apareció de manera natural, como parte de sus diversos intentos por sobrevivir [1]. La cantidad de animales que eran cazados para su consumo, el número de bestias dispuestas en rebaños, las plantas empleadas a diario en distintas tareas y para la alimentación, así como la comparación de distintas cantidades, formas y tamaños, muestran cómo el concepto de número hace parte de la historia de la humanidad.

Uno de los problemas iniciales en los procesos de conteo en la vida diaria del ser humano primitivo probablemente estaba asociado a la forma de recolectar la información. De ello dan cuenta distintos restos arqueológicos en los que se han encontrado formas diversas que se utilizaban para contar; por ejemplo, muescas de huesos agrupadas de cinco en cinco, o agrupaciones de semillas, palos o piedras de distintos tamaños. Incluso, se usaban los dedos de las manos y los pies para contar, razón por la cual abundan los sistemas de numeración en base diez.

Desde un principio, se crearon diversas concepciones sobre el número, fundamentalmente orientadas a procesos de conteo, aunque se prescindía del cero, y surgieron distintas formas de representación, que dieron lugar a **sistemas de numeración** en los que se adoptaban distintos símbolos para representar cantidades determinadas.

El ejemplo más apropiado para ilustrar esta idea corresponde al sistema de numeración decimal introducido por los árabes en Europa durante la Edad Media

De ahí la denominación de **sistema de numeración arábigo** (aunque se afirma que provino, en primera instancia, de la cultura india y fue heredado posteriormente por los árabes, razón por la que suele llamarse también indo-arábigo).

Sistema de numeración arábigo

El sistema de numeración arábigo, como ya se mencionó, es un **sistema decimal**, puesto que se utilizan diez símbolos para representar números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Es un sistema posicional, es decir, se necesitan diez unidades para formar un elemento de segundo orden, conocido como **decena**. Posteriormente, se requieren diez decenas para formar una centena y, de forma completamente natural, siempre se requerirán diez elementos de un orden inferior para construir uno de orden inmediatamente superior. En ese sentido, todo número escrito en el sistema de numeración decimal se puede representar como la suma de múltiplos de potencias de 10. Por ejemplo, el número 4536 se puede expresar de la siguiente manera:

$$6 \text{ x } 1 + 3 \text{ x } 10 + 5 \text{ x } 100 + 4 \text{ x } 1000 = 6 \text{ x } 10^0 + 3 \text{ x } 10^1 + 5 \text{ x } 10^2 + 4 \text{ x } 10^3$$

A este sistema de numeración también se le suele llamar de base 10, justamente, porque todo número natural se puede representar como la suma de las unidades de cierto orden en términos de múltiplos de potencias de 10.

Otras culturas, en cambio, adoptaron sistemas de numeración en los que no es significativa la posición de sus cifras.

A continuación, se describen algunos otros sistemas de numeración.

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Sistema babilónico (3300 a. C)

Hacia el año 1800 a. C., aproximadamente, varios pueblos de la región de Mesopotamia como los sumerios, los babilonios y los acadios comenzaron a utilizar un sistema de numeración para representar las unidades, formado con objetos de tamaños y formas. Este sistema se basaba en la escritura cuneiforme, que se hacía en tablillas de arcilla, con punzones (tallos de cáñamo biselados). Las marcas tenían forma de cuña, como se aprecia en la figura 1.1, debido a la forma del punzón, de ahí el nombre de cuneiforme.

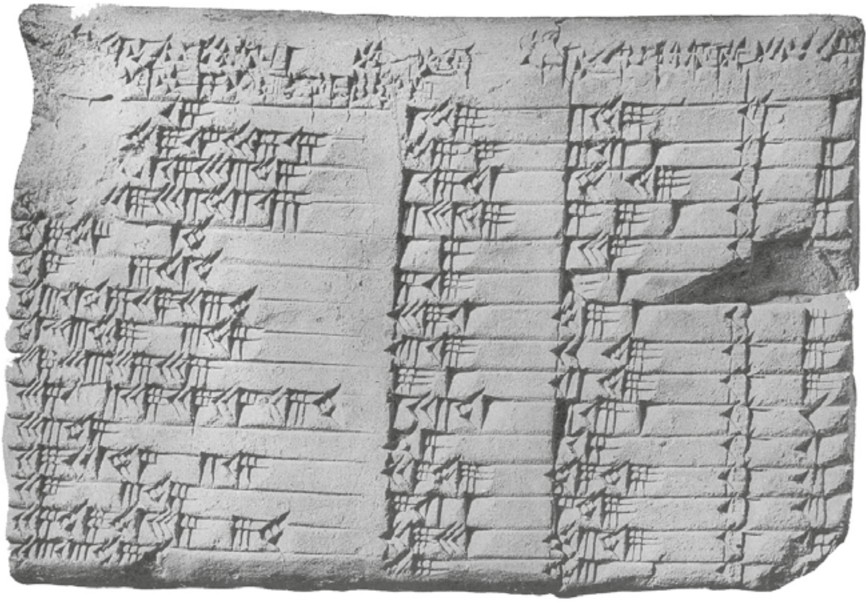


Figura 1.1. Tabilla Plimpton.
(Tomada de Wikimedia Commons,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1170904).

Los números en este sistema se representaban con la ayuda de solo dos símbolos, una cuña vertical que representaba a la unidad (𒁹) y una cuña horizontal para el número diez (𒌋) [2]. El sistema de numeración babilónico, que empleaba la escritura cuneiforme creada por los sumerios, era de base 60 (sexagesimal) y, para escribir los números enteros del 1 al 59, los signos del diez y la unidad se repiten tantas veces como en el número hubiese decenas y unidades. La unidad de segundo orden, representada por el mismo signo, es 60 veces mayor que la de primer orden, y la unidad de tercer orden es 60 veces mayor que la de segundo y 3600 veces mayor $60 \times 60 = 3600$ que la unidad de primer orden, y así sucesivamente (figura 1.2).

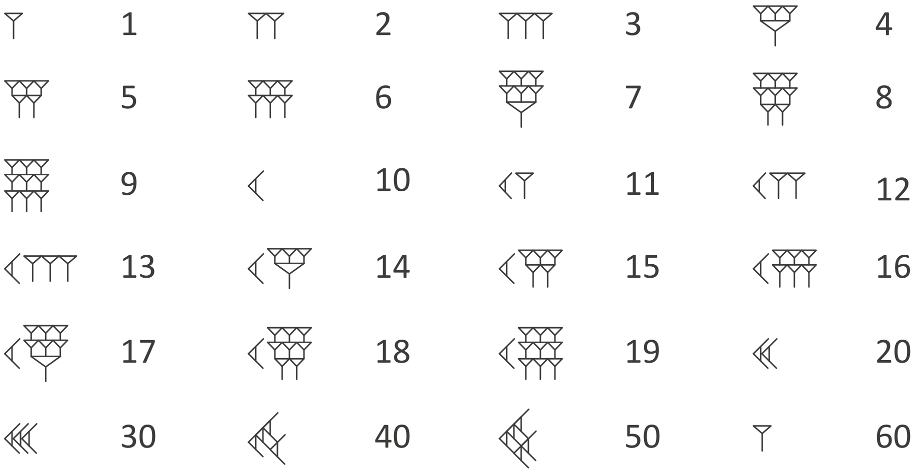


Figura 1.2. Sistema de numeración babilónico.
(Tomada de Timetoast, «Sistema de numeración babilónico», https://www.timetoast.com/timelines/sistemas-de-numeracion-61c08e3c-d4f6-442f-94ad-66abe0023f48).

Se trata de un sistema de numeración posicional. Esto significa que cada símbolo tiene un valor específico dentro del número que se quiere representar, el cual depende de la posición que ocupa dentro de dicho número. Así, un mismo signo puede representar en él tanto 1 como 1 x 60, como 1 x 60 x 60 = 60^2 = 3600, etcétera, en función del lugar en que dicho signo esté escrito. Por ejemplo, los números 84 y 3675 se representan así:

$$1 \times 60 \quad + \quad 24 \quad = \quad 84$$

$$1 \times 60^2 \quad + \quad 1 \times 60 \quad + \quad 15 \quad = \quad 3675$$

Sistema de numeración egipcio (3000 a. C.)

La forma de comunicación de los antiguos egipcios se nos ha transmitido mediante textos que aparecen en papiros, trozos de alfarería, láminas de caliza y, sobre todo, en monumentos de piedra, a través de los jeroglíficos.

En el sistema de numeración egipcio, como se evidencia en el papiro de Rhind, un documento que contiene numerosos problemas matemáticos propuestos y resueltos por los antiguos egipcios, se utilizaban siete cifras jeroglíficas, las cuales representaban distintas cantidades mediante un sistema de numeración decimal. El 1 se representaba por medio de una línea vertical, el símbolo más intuitivo que podemos utilizar para representar la unidad; el 10, mediante un arco similar al símbolo de intersección que utilizamos en la actualidad un cordón que habría servido para unir los bastoncillos (trazos verticales) hasta formar un paquete de diez unidades; el 100 tenía forma de caracol (el origen de la palabra «espiral» correspondía a los mismos sonidos que la palabra «cien»); el 1000 tenía forma de flor de loto (el origen de la palabra para denominar esta flor de loto correspondía a los mismos sonidos que la palabra «mil»), el 10 000 tenía forma de dedo doblado (hacía referencia a la antigua forma de contar hasta 9999, mediante distintas posiciones de los dedos y la mano), el 100 000 era representado por un pez (haciendo referencia a la gran fecundidad de estos animales en el Nilo) y 1 000 000 era representado por una persona arrodillada con los brazos en alto (símbolo que aludía a un dios que sostenía la bóveda celeste), por mencionar algunos de estos símbolos (figura 1.3).

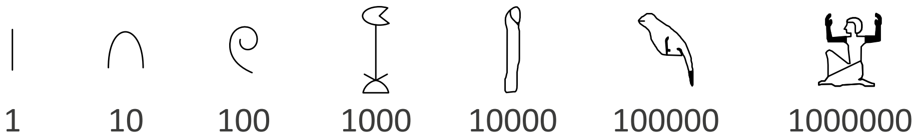


Figura 1.3. Sistema de numeración egipcio.
(Tomada de Wikimedia Commons, https://es.wikipedia.org/wiki/Numeración_egipcia#/media/Archivo:Nome_u_12_14.jpg).

Por ejemplo, el número 4322 se representaba del siguiente modo:

$$4000 + 300 + 20 + 2$$

Como se puede apreciar, era un sistema aditivo para representar los números, en el cual se utilizaban símbolos para representar las cantidades. Es importante mencionar que el orden en que se escribían los símbolos era indiferente, debido a que cada figura representaba exclusivamente un único valor. De tal manera que, independientemente del orden en que estos se presentaban, el valor no cambiaba; por tanto, su representación podía hacerse de izquierda a derecha, de abajo hacia arriba o viceversa, sin que se alterara el valor de la cifra expresada. Por tal razón, al sistema de numeración egipcio se le conoce como no posicional.

Sistema de numeración romano (siglos VII-IV a. C.)

El sistema romano, que ha perdurado con el transcurso del tiempo. Se utiliza en la actualidad para numerar partes de obras, como capítulos de libro o escenas de una obra de teatro, para designar a algunas autoridades (como emperadores, reyes y papas), para ordenar los contenidos de un índice o los tomos de una enciclopedia, entre otros usos. Su influencia es notable aún en nuestros días.

Los símbolos utilizados por los romanos fueron letras mayúsculas, que en este sistema de numeración equivalen a un número específico:

$$\mathrm{I} = 1 \qquad \mathrm{C} = 100$$

$$\mathrm{X} = 10 \qquad \mathrm{D} = 500$$

$$\mathrm{L} = 50 \qquad \mathrm{M} = 1000$$

Cada número se puede escribir como la combinación de distintos símbolos, que se utilizan teniendo como referencia el 1 y el 5 que usamos en la actualidad. Se le considera un sistema de numeración con estructura aditiva. Por ejemplo,

$$525 = \mathrm{D\,X\,X\,V}.$$

Ahora bien, para representar cantidades con números romanos, es importante considerar ciertas reglas:

- Los números se representan siempre con letras mayúsculas, puesto que en sus inicios el alfabeto latino solo contaba con este tipo de letras.
- No debe repetirse más de tres veces consecutivas un mismo símbolo. Por ejemplo, 233 se escribe: CCXXXIII, pero 444 debe escribirse CDXLIV, y no CCCCXXXXIIII.
- Cuando un signo va seguido de otro con valor igual o inferior, se suman sus valores. Por ejemplo, VI = 6, VX = 15, XXVII = 27.
- Cuando los signos I, X, C van seguidos de otro de mayor valor, se restan del valor de este:
- IV en lugar de IIII para representar el 4, es decir, $5 - 1$
- IX en lugar de VIIII para representar el 9, es decir, $10 - 1$.
- KL en lugar de XXXX para representar el 40, es decir, $50 - 10$.
- XC en lugar de LXXXX para representar el 90, es decir, $100 - 10$
- CD en lugar de CCCC para representar el 400, es decir, $500 - 100$.
- CM en lugar de DCCCC para representar el 900, es decir, $1000 - 100$.
- los signos V, L y D no se utilizan nunca con valor de resta. por ejemplo, 45 debe escribirse XLV, y no VL.
- El valor de los números romanos queda multiplicado por mil tantas veces como rayas horizontales se tracen encima. De este modo, $\overline{\mathrm{L}}$ = 50 000, $\overline{\mathrm{M}}$ = 1 000 000.

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Sistema de numeración chino (1500 a. C.)

Otro sistema de numeración que ha perdurado hasta la actualidad proviene de la cultura china. Se trata de un sistema decimal, puesto que se utilizan unidades y distintas potencias de diez para representar cantidades. Tiene nueve símbolos distintos para los primeros nueve números, pero no usa ningún símbolo para representar el cero (figura 1.4).

一	二	三	四	五
1	2	3	4	5
六	七	八	九	十
6	7	8	9	10
百	千	万	亿	
100	1 000	10 000	100 000	

Figura 1.4. Sistema de numeración chino.

(Tomada de Cultura10.org, «Números chinos: características y funcionamiento de este sistema», Elaborqación propia).

Su carácter es posicional, puesto que la posición de cada cifra indica su valor dentro del número dado. En efecto, este sistema de numeración es muy similar al indo-arábigo que usamos en la actualidad, con la diferencia de que todos los símbolos representan distintas cantidades. De esta manera, por ejemplo, el número 4361 de puede representar así:

四千 三百 六十 一

$$4 \text{ X } 1000 + 3 \text{ X } 100 + 6 \text{ X } 10 + 1$$

Sistema de numeración maya (250-900 d. C.)

A diferencia de los sistemas de numeración anteriores, el de la cultura maya empleó una base 20 (vigecimal) para la representación de sus símbolos (figura 1.5). Por otra parte, uno de los aportes más significativos de este sistema fue la aparición del cero.

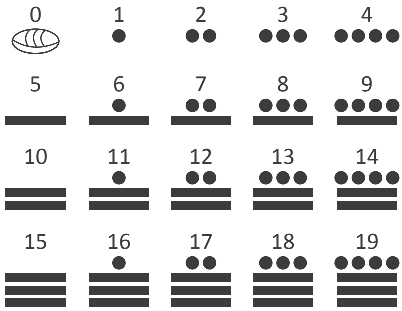
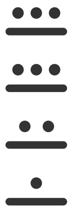


Figura 1.5. Sistema de numeración maya.
(Tomada de Simboloteca, «Números mayas: el sistema de numeración maya», https://www.simboloteca.com/sistema-numeracion-maya).

Como se observa, por ejemplo, el número 17 se representa por medio del símbolo  .

Puesto que el cinco se representa por una línea horizontal y el uno por medio de un punto, se concluye que 17 = 3 x 5 + 2 x 1, por lo que se considera que tiene una estructura multiplicativa.

Para aquellos números mayores a 20, se disponían los símbolos por columnas, de arriba hacia abajo multiplicando por potencias de 20 el valor de cada cifra según la posición que ocupe. Por ejemplo, el número 67 346 se puede representar de la siguiente forma:



$8 \text{ X } 20^3$

$8 \text{ X } 20^2$

$7 \text{ X } 20^1$

$6 \text{ X } 20^0$

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

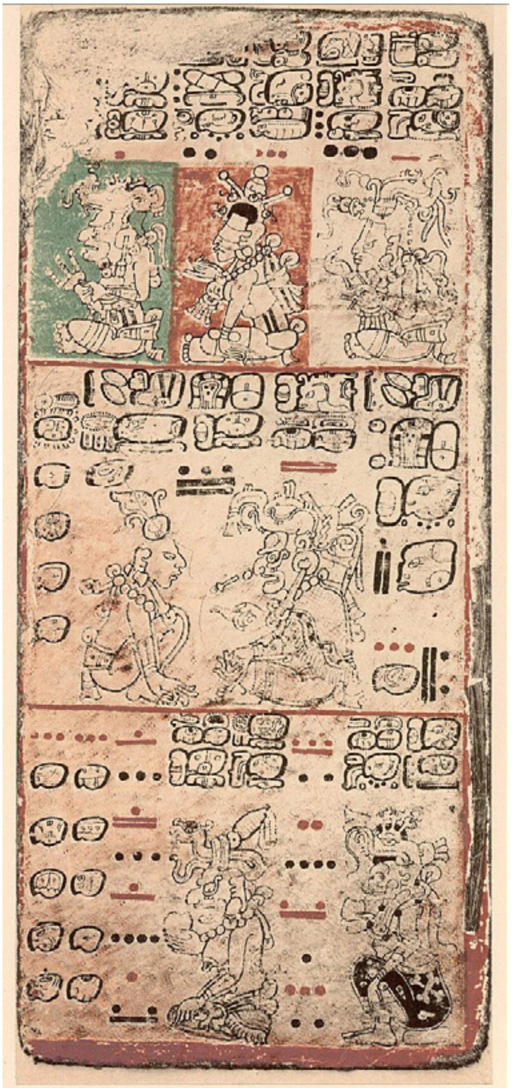


Figura 1.6. Códice de Dresde, perteneciente a la cultura maya.
(Tomada de Wikimedia Commons,
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dresden_Codex_p09.jpg).

Sistemas de numeración griegos (600 a. C.)

Se finaliza este desarrollo histórico del origen del número con una de las culturas más fascinantes de la historia de la humanidad, por sus aportes a la filosofía, la política, la ética y, por supuesto, a la matemática y al desarrollo de la civilización occidental: la cultura griega.

Los griegos utilizaron dos sistemas de numeración para representar números, aunque eran bastante más complejos y complicados en relación con el sistema de numeración indo-arábigo empleado en la actualidad. El más antiguo, conocido como **acrofónico**, estaba formado por un grupo de signos que indicaban la inicial de la palabra con la que se llamaban algunos números particularmente significativos, como la unidad, 5, 10, 100, 1000 y 10 000.

El número 1 era representado por una barra vertical. El resto se representaban por las iniciales mayúsculas de cada número: la letra pi (Π), inicio de la palabra *ΠΕΝΤΕ* (pénte, representaba el 5; la letra delta (Δ), inicio de *ΔΕΚΑ* (*déka*), el 10; la letra eta (H), inicio de *HEKATON (hekatón)*, el 100; la letra chi (X), inicio de *ΧΙΛΙΟΙ (chílioi)*, el 1000, y la letra mu (M), inicio de *ΜΥΡΙΑΣ (myrías)*, el 10 000.

Por otro lado, los signos que se asocian a los números 50, 500, 5000 y 50 000 están compuestos a partir del símbolo Π junto a la correspondiente potencia de 10. En otras palabras, para quintuplicar el valor de una de las letras Δ, H, X o M basta con colocarla en el interior de la letra Π.

A la hora de establecer su sistema de numeración, los griegos se vieron influidos por los avances de los egipcios y los fenicios. Idearon un sistema cuya base sería el número 10 y que se caracteriza por la representación literal, esto es, usando las letras minúsculas de su alfabeto seguida de un acento agudo (tabla 1.1). A partir del siglo IV a. C., el sistema acrofónico fue sustituido por este sistema alfabético cuasidecimal, llamado *jónico*.

En este sistema, la necesidad impuso el uso de tres signos característicos de los alfabetos arcaicos, que ya no estaban presentes en el alfabeto jónico: ϛ (stigma), ϡ (sampi) y ϟ (qoppa, que luego será la Q en el alfabeto latino). Se puede confirmar que ninguno de los dos sistemas contaba con un símbolo para representar al cero.

Tabla 1.1. Sistema de numeración jónico

Símbolo	Letra	Valor	Símbolo	Letra	Valor	Símbolo	Letra	Valor
α´	alpha	1	ι´	iota	10	ρ´	rho	100
β´	beta	2	κ´	kappa	20	σ´	sigma	200
γ´	gamma	3	λ´	lambda	30	τ´	tau	300
δ´	delta	4	μ´	mi	40	υ´	ípsilon	400

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Símbolo	Letra	Valor	Símbolo	Letra	Valor	Símbolo	Letra	Valor
ε´	épsilon	5	ν´	ni	50	φ´	phi	500
ς	stigma	6	ξ´	xi	60	χ´	chi	600
ζ´	zeta	7	ο´	ómicron	70	ψ´	psi	700
η´	eta	8	π´	phi	80	ω´	omega	800
θ´	theta	9	ϙ´ / ϟ´	qoppa	90	ϡ´	sampi	900

Para representar distintas cantidades, asignaban a cada cifra una letra del alfabeto correspondiente, según su posición. Para diferenciar un número de una palabra, agregaban un signo de acento agudo al final de cada cantidad. Por ejemplo, el número 675 se representa por medio de la expresión: $\chi o \varepsilon'$, que equivale a $600 + 70 + 5$.

Algunos elementos de la teoría de conjuntos

Los conceptos de conjunto, elemento y pertenencia son considerados como intuitivos en la matemática y, por tanto, no serán definidos en este libro. Se trabaja con ellos y se abordan desde sus propiedades fundamentales.

Se pretende retomar los conceptos necesarios de la teoría de conjuntos que permitan construir el conjunto de los números reales a partir de los números naturales, los cuales se definirán en el apartado 1.4.

Conceptos básicos

Un conjunto se puede determinar de dos maneras:

- Escribiendo una lista de objetos o elementos que lo determinan.
- Mostrando aquella condición que cumplen sus elementos.

Un conjunto está determinado por extensión cuando se conocen uno a uno sus elementos. Suele escribirse entre llaves, así:

$$A = \{1,2,3,4,5\}.$$

Intuitivamente, se reconocen los elementos del conjunto A como números, bajo la condición de ser números naturales mayores que 0 y menores que 6. Cuando se conoce la condición o las condiciones que cumplen los elementos del conjunto, se dice que está determinado por comprensión. De modo que, por ejemplo,

$$A = \{x{:}x \text{ es un número natural mayor que } 0 \text{ pero menor que } 6\}.$$

se puede leer como «el conjunto de todas las x tales que x es un número natural mayor que 0 pero menor que 6».

Si se nota como $p(x)$ la condición dada en términos de x, todo conjunto por comprensión se puede escribir de la forma:

$$A = \{x{:}p(x)\}.$$

Un conjunto que no posee elementos se llama **vacío** y se nota por medio del símbolo ∅ o, si no se presta para confusión, se dice que $A = \{\ \}$ es un conjunto vacío.

Si se tienen, por ejemplo, los conjuntos A y B:

A = {1, 3, 5, 7, 9},

B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};

para indicar que 5 está en A, se escribe: $5 \in A$.

Análogamente, para señalar que 6 no está en A, se escribe: $6 \notin A$

Además, dado que todo elemento de A está en B, se dice que A está contenido en B, representado como $A \subseteq B$.

De forma similar, si hay al menos un elemento de B que no está en A, se dice que B no está contenido en A: $B \nsubseteq C$.

Relación de equivalencia

Como todas las artes y ciencias, las matemáticas procuran establecer nociones generales mediante representaciones *concretas* y comprensibles. Una de ellas es el concepto de clasificación. En particular, en la teoría de conjuntos, una clasificación del universo corresponde a una partición en un conjunto.

Para dar significado a una concepción de clasificación (y en consecuencia, de partición) se requiere precisar algunas definiciones que soporten la teoría [3]. Todas ellas, basadas en los aportes de la teoría de conjuntos.

Definición 1.1. *Sean A y B dos conjuntos. Se define el producto cartesiano de A y B como el cojunto de todos los elementos determinados por pares ordenados en los que el primer elemento pertenece a A y el segundo a B, es decir*

$$A \text{ x } B = \{(x,y) \,|\, x \in A, y \in B\}.$$

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$, entonces, el producto cartesiano

$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (4,4), (4,5)\ (4,6) \end{matrix} \right\}$$

Para este caso, es posible representar el producto cartesiano $A \times B$ como puntos en el plano. Por esta razón, suele llamarse **plano cartesiano**. Esta representación se atri-

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

buye a René Descartes (1596-1650), quien, con base en sus trabajos sobre geometría analítica, identificó los puntos del plano con parejas de la forma (x,y), en un sistema de coordenadas en el que cada par ordenado establece la posición de un punto con respecto a dos rectas perpendiculares fijadas, llamadas **ejes de coordenadas**. Así, cada par de coordenadas especifica un punto único del plano, y cada punto viene dado por un único par de coordenadas.

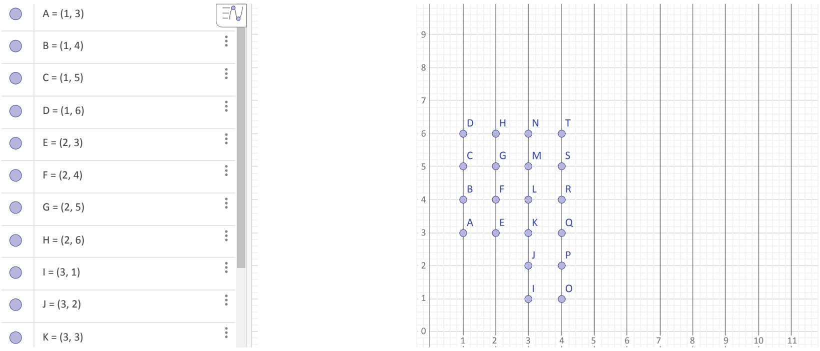


Figura 1.7. Representación de puntos en el plano cartesiano.

(Elaborada con GeoGebra, herramienta en línea disponible en https://www.geogebra.org).

Definición 1.2.*Una relación A x B (binaria) es un subconjunto de algún producto cartesiano . Una relación (binaria) en un conjunto A es un subconjunto del producto A x A.*

Usualmente, las relaciones son representadas por medio de las letras mayúsculas R, S, T, o por símbolos como $\sim$, $\approx$ o $\equiv$, aunque lo realmente importante es su definición.

Dados dos conjuntos $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y $B= \{2,4,6,8,10\}$, se define por ejemplo la siguiente relación:

Sea que $a \in A$ y , $b \in B$, se dice que $a\,R\,b$ (a está relacionado con b por medio de R) siempre que $b\backslash a$ (b divida a a). La relación implica que un elemento a de A se relaciona con un elemento b de B siempre que b divida a a, de tal manera que los elementos de dicha relación serían los que se presentan en la tabla 1.2.

Tabla 1.2. Elementos de la relación «ser divisor de» entre los conjuntos A y B

a	b
2	2
4	2
4	4
6	2
6	3

a	*b*
6	6
8	2
8	4
8	8
10	2
10	5
10	10

Naturalmente, la tabla 1.2 es una representación de la relación. Sin embargo, se entenderá que una relación es un conjunto de parejas ordenadas y, por tanto, es posible representarla del siguiente modo:

$R = \{(2,2), (4,2), (4,4), (6,2), (6,3), (6,6), (8,2), (8,4), (8,8), (10,2), (10,5), (10,10)\}$

Definición 1.3. *Una relación R en un conjunto A es un subconjunto no vacío del producto cartesiano A x A.*

En el conjunto $A = \{1,2,3\}$, se define la relación R como $a\ R\ b$ siempre que $a < b$, por tanto:

$R = \{ (1,2), (1,3), (2,3)\}$.

Esta relación, recibe el nombre de relación del orden habitual, ya que indica que el primer elemento del par precede al segundo, según el orden habitual de los números naturales.

Otra relación (S) sería la siguiente:

$S = \{ (1,1), (2,2), (3,3)\}$.,

que se puede definir mediante la condición $a\ R\ b$ siempre que $a = b$.

En la definición no se exige que todos los elementos del conjunto estén relacionados con algún otro, ni que todos reciban la relación de alguno.

Definición 1.4 *Una relación de equivalencia sobre un conjunto C es una relación que cumple las siguientes propiedades:*

a. Reflexiva. Para todo $a \in A$; $a\ R\ a$.

b. Simétrica. Para todo $a, b \in A$; $a\ R\ b$ entonces $b\ R\ a$.

c. Transitiva. Para todo $a, b, c, \in$ C; $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$ entonces $a\ R\ c$.

Las relaciones de equivalencia dan lugar al concepto de **clase de equivalencia**. La clase de equivalencia de un elemento a, según una relación R sobre un conjunto A, es

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

el subconjunto de todos los elementos b de A tales que $a\ R\ b$. El conjunto de todas las clases de equivalencia definidas sobre A según la relación R forma una partición de ese conjunto, es decir, son un conjunto de subconjuntos disyuntos, y la unión de todos ellos es el conjunto A.

Ejemplo

Sea , $A = \{1,3,5,7,9,10\}$, se define la relación R de la siguiente manera: si , $a, b, \in$ A, $a\ R\ b$ siempre que $a + b$ sea divisible por 2.

Considérense, por tanto, los elementos de la relación R:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} (1,1),\ (1,3),\ (1,5),\ (1,7),\ (1,9),\ (3,1),\ (3,3),\ (3,5),\ (3,7),\ (3,9),\ (5,1),\ (5,3),\ (5,5), \\ (5,7),\ (5,9),\ (7,1),\ (7,3),\ (7,5)\ (7,7),\ (7,9),\ (9,1),\ (9,3),\ (9,5),\ (9,7),\ (9,9),\ (10,10) \end{array} \right\}$$

Obsérvese que R es una relación de equivalencia, puesto que

a. Es reflexiva. Para todo $a \in$ A; $a\ R\ a$:

$$(1,1),\ (3,3),\ (5,5),\ (7,7),\ (9,9).\ (10.10) \in R$$

a. Es simétrica. Para todo a , b $\in$ A, si $a\ R\ b$ entonces $b\ R\ a$. Así, se tiene que, por ejemplo, como $(1,3) \in R$, $(3,1)$ también debe estar en la relación:

$$(1,3) \in R$$

A continuación, se verifica que se cumple para las demás parejas:

$$(1,1) \in R \longrightarrow (1,1) \in R$$

$$(1,3) \in R \longrightarrow (3,1) \in R$$

$$(1,5) \in R \longrightarrow (5,1) \in R$$

$$(1,7) \in R \longrightarrow (7,1) \in R$$

$$(1,9) \in R \longrightarrow (9,1) \in R$$

$$(3,1) \in R \longrightarrow (1,3) \in R$$

$$(3,3) \in R \longrightarrow (3,3) \in R$$

$$(3,5) \in R \longrightarrow (5,3) \in R$$

$$(3,7) \in R \longrightarrow (7,3) \in R$$

$$(3,9) \in R \longrightarrow (9,3) \in R$$

$$(5,1) \in R \longrightarrow (1,5) \in R$$

$$(5,3) \in R \longrightarrow (3,5) \in R$$

$$(5,5) \in R \longrightarrow (5,5) \in R$$

$$(5,7) \in R \longrightarrow (7,5) \in R$$

$$(5,9) \in R \longrightarrow (9,5) \in R$$

$$(7,1) \in R \longrightarrow (1,7) \in R$$

$$(7,3) \in R \longrightarrow (3,7) \in R$$

$$(7,5) \in R \longrightarrow (5,7) \in R$$

$$(7,7) \in R \longrightarrow (7,7) \in R$$

$$(7,9) \in R \longrightarrow (9,7) \in R$$

$$(9,1) \in R \longrightarrow (1,9) \in R$$

$$(9,3) \in R \longrightarrow (3,9) \in R$$

$$(9,5) \in R \longrightarrow (5,9) \in R$$

$$(9,7) \in R \longrightarrow (7,9) \in R$$

$$(9,9) \in R \longrightarrow (9,9) \in R$$

$$(10,10) \in R \longrightarrow (10,10) \in R$$

a. Es transitiva. Para todo $a,b,c \in$ A, si $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$, entonces $a\ R\ c$:

$$\text{Si } (1,3) \in R \text{ y } (3,1) \in R, \text{ entonces } (1,1) \in R.$$

$$\text{Si } (1,3) \in R \text{ y } (3,3) \in R, \text{ entonces } (1,3) \in R.$$

$$\text{Si } (1,3) \in R \text{ y } (3,5) \in R, \text{ entonces } (1,5) \in R.$$

$$\text{Si } (1,3) \in R \text{ y } (3,7) \in R, \text{ entonces } (1,7) \in R.$$

$$\text{Si } (1,3) \in R \text{ y } (3,9) \in R, \text{ entonces } (1,9) \in R.$$

Las demás comprobaciones se dejan como ejercicio para el lector.

Ejemplo

La clase del 1, denotada por $\ll 1 \gg = \{1,3,5,7,9\}$. En ese mismo sentido,

$$\ll 3 \gg = \{1,3,5,7,9\},$$

$$\ll 5 \gg = \{1,3,5,7,9\},$$

$$\ll 7 \gg = \{1,3,5,7,9\},$$

$$\ll 9 \gg = \{1,3,5,7,9\},$$

$$\ll 10 \gg = \{1,3,5,7,9\},$$

En tal caso, podemos observar que, en realidad, hay únicamente dos clases distintas, $\ll 1 \gg$ y $\ll 10 \gg$ (Puesto que $\ll 1 \gg = \ll 3 \gg = \ll 5 \gg = \ll 7 \gg = \ll 9 \gg$.

Sistema axiomático

Los axiomas suelen entenderse como proposiciones cuya verdad es evidente y, por tanto, no requieren demostración [4]. Los axiomas de una teoría matemática proporcionan el marco de referencia más general de dicha teoría. Al principio, cuando la teoría empieza a funcionar y se demuestran los primeros resultados más básicos, es frecuente recurrir de forma explícita a los axiomas. Más adelante, cuando la teoría va avanzando, los axiomas no suelen citarse con tanta frecuencia, porque se apoyan en resultados más elaborados previamente fueron demostrados. Pero los axiomas siempre están presentes, aunque sea de forma discreta. En el siguiente apartado, se emplean axiomas para la construcción de los números naturales.

Los números naturales

> Dios hizo los números naturales, el resto es obra del hombre.
>
> Leopold Kronecher

La concepción del número natural involucra el desarrollo histórico de las actividades de medir, contar y ordenar, relacionadas entre sí e independientes las unas de la otras.

Esta idea, bastante concreta, pero con trasfondos mucho más amplios, se desarrolló en distintas culturas en la Antigüedad y fue descrita por medio de sistemas de numeración. Por la influencia que ha tenido en el desarrollo de la matemática en Occidente, se profundiza en las ideas concebidas por la cultura griega, con la que se inicia una interesante travesía hacia la concepción del número natural.

Luego, se dará una definición de número natural, utilizando conceptos de la teoría de conjuntos, la cual evolucionó a través del tiempo desde la época de los matemáticos griegos. Fue Giuseppe Peano (1858-1932) quien axiomatizó los números naturales, en un intento de establecer un fundamento sólido. Sin embargo, esta perspectiva es cuestionable, pues cualquier conjunto de números naturales podría cumplir estos axiomas sin contener a todos los números en cuestión.

Otras teorías similares fueron desarrolladas por Frege, Russell, Cantor, Zermelo y Neumann, algunas basadas en la teoría de los números cardinales y otras en la de los números ordinales.

La Grecia antigua y la escuela pitagórica

En el año 572 a. C., en Grecia, nace uno de los matemáticos más grandes de la historia, Pitágoras de Samos (572-497 a. C.). Su influencia en la constitución de la geometría se puede apreciar en algunos textos en el volumen I de los presocráticos [5].

Pitágoras pasó la mayor parte de su tiempo tratando el aspecto aritmético de la geometría. En consecuencia, siempre relacionó el número con la figura, uno de los aportes más pronunciados de la escuela que lleva su nombre (en adelante, se hace referencia a Pitágoras y a la escuela pitagórica como sinónimos).

Los pitagóricos llegan a la conclusión de que «todo es número». Cuando Pitágoras afirmaba esto era porque literalmente, para ellos, todo era número. La cualidad —propiedades no medibles de un objeto, por ejemplo, el color— y la cantidad —las características que se pueden medir numéricamente, por ejemplo, el volumen—, son solo un aspecto dentro del concepto de número, que para los pitagóricos era la esencia de todas las cosas. Según ellos, existe una división entre cualidad y cantidad, pero aun así ambas se encuentran como una unidad en todas las cosas.

Pitágoras creía que los principios en matemáticas eran los mismos de todas las cosas existentes. Dado que los números constituyen en sí mismos la base las matemáticas, en ellos, según los pitagóricos, había muchas semejanzas con la naturaleza, con lo que existe y lo que se genera, incluso más que en el fuego, el aire, la tierra y el agua. En consecuencia, si todas las cosas, en toda la naturaleza, parecían asemejarse a los números, se supuso que los elementos de los números eran los elementos de todas las cosas existentes.

Para los pitagóricos, la matemática se ocupa de lo discreto y lo continuo:

- Lo discreto puede ser lo absoluto o lo concreto.
- Lo absoluto lo estudia la aritmética.
- Lo relativo lo estudia la música.
- Lo continuo es estable o móvil.
- Lo estable lo estudia la geometría.
- Lo móvil lo estudia la astronomía.

Estrictamente hablando, según Tales de Mileto (624-546 a. C.), otra de las mentes más grandes de la Grecia clásica, un número es una colección de unidades. Por su parte, Aristóteles (364 a. C.), uno de los grandes pensadores engendrado en la antigua Grecia, citado por [5, p. 85], lo define como «cierta cantidad de unos, multitud limitada, multitud combinación de unidades, multitud de indivisibles, multitud medible por 1».

Euclides (325-265 a. C.), hombre brillante, también de origen griego —aunque poco se sabe acerca de su vida—, recopiló con maestría los alcances de la geometría y de la aritmética de la época en su obra *Elementos,* que junto a la Biblia y el *Quijote* se convirtieron en los textos más leídos en toda la historia de la humanidad. Según Euclides, una unidad es «aquello por lo cual cada cosa puede ser llamada uno» (*Elementos*, libro VII, definición I) y «un número es una pluralidad compuesta de unidades» (definición II).

La primera teoría de la medida se atribuye a los pitagóricos, quienes sustentaban la idea de que para poder medir se requieren los números para contar. Esto significa que dadas dos magnitudes A y B de la misma naturaleza, se pueden encontrar dos números m y n tales que $mA = nB$.

En términos de comparación, esto indica que A es a B como n es a m, que puede escribirse como $\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$. Sin embargo, para los griegos, $\frac{n}{m}$ no es un número. Tampoco lo es $\frac{A}{B}$. No obstante, en el desarrollo histórico de la matemática, esta expresión deja entrever la idea de número racional, que surge mucho tiempo después.

Para los pitagóricos, los números son realidades naturales, con propiedades intrínsecas. Son arreglos de puntos cuya disposición manifiesta algunas propiedades (regularidades). De ahí que hayan dedicado bastante tiempo a la búsqueda de patrones y relaciones entre números. Los números pitagóricos son números figurados, lo que se conoce como **aritmogeometría pitagórica** [5].

Al comparar dos números, se puede considerar cuánto es uno más grande que el otro; es decir, cuál es su diferencia. Una sucesión es un conjunto ordenado de números en el cual se conoce el primer término y en el que la diferencia entre dos consecutivos es la misma para todos los pares. A esta diferencia se le llama **razón aritmética** y a la sucesión resultante, **progresión aritmética**. En el lenguaje actual, esto significa que al considerar la progresión aritmética cuyo primer término es 1 y cuya razón es 1, se obtienen todos los números:

$$1 = 1{,}1 + 1 = 2, \quad 2 + 1 = 3 \quad 3 + 1 = 4{,}4 + 1 = 5, \ldots$$

Números triangulares

Para los pitagóricos, un número triangular es una metáfora, un conjunto de puntos que describe la forma de un triángulo [5].

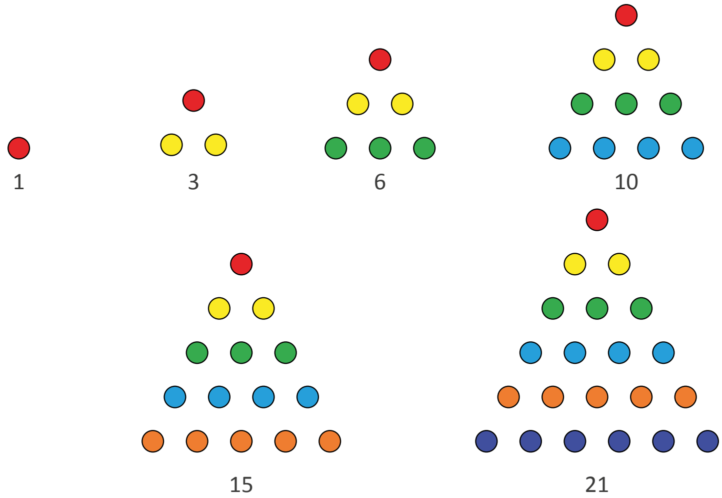


Figura 1.8. Números triangulares.

Fuente: Elaboraciópn propia

Los números triangulares, como se aprecia en la figura 1.8, se obtienen mediante las sumas:

$$1 = 1,$$

$$1 + 2 = 3,$$

$$1 + 2 + 3 = 6,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15,$$

$$\ldots$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Este último es un número triangular con $n - 1$ triángulos gnómicos.

Números tetraedales

A partir de un triángulo equilátero se construye un tetraedro colocando triángulos equiláteros congruentes sobre cada uno de los lados del triángulo base [5].

https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

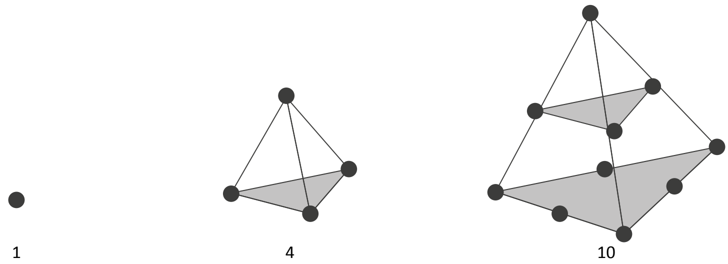


Figura 1.9. Números tetraedales.

En la figura 1.9 se muestran los tetraedros resultantes de las siguientes sumas parciales de números triangulares:

$$1 = 1,$$

$$1 + 3 = 4,$$

$$1 + 3 + 6 = 10,$$

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20,$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35,$$

$$\ldots$$

Con los puntos se forman líneas, que a su vez forman figuras planas. Estas últimas constituyen cuerpos en el espacio. De este modo, todos los cuerpos parecen formados por puntos.

Números impares

Se generan mediante una progresión aritmética cuyo primer término es 1 y cuya razón es 2.

$$1 = 1,$$

$$1 + 2 = 3,$$

$$3 + 2 = 5,$$

$$5 + 2 = 7,$$

$$\ldots$$

$$[(2n - 1) - 2)] + 2 = (2n - 3) + 2 = 2n - 1$$

Números cuadrados

Se obtienen mediante sumar parciales de números impares.

$$1 = 1,$$

$$1 + 3 = 4,$$

$$1 + 3 + 5 = 9,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16,$$

$$\ldots$$

Todo número impar se puede expresar como la diferencia de dos números cuadrados que tienen respectivamente, por lados, impares consecutivos. Desde luego, se cumple que

$$1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Números pentaedrales

Es una secuencia, con primer término 1, que se obtiene sumando progresivamente los números cuadrados [5]:

$$1 = 1,$$

$$1 + 4 = 5,$$

$$1 + 4 + 9 = 14,$$

$$1 + 4 + 9 + 16 = 30,$$

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55,$$

$$\ldots$$

Números pentagonales

Se obtienen, tal como puede a preciarse en la figura 1.10, a partir de la progresión aritmética:

$$1 = 1,$$

$$1 + 3 = 4,$$

$$4 + 3 = 7,$$

$$7 + 3 = 10,$$

$$\ldots$$

$$(3n - 5) + 3 = 3n - 2.$$

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

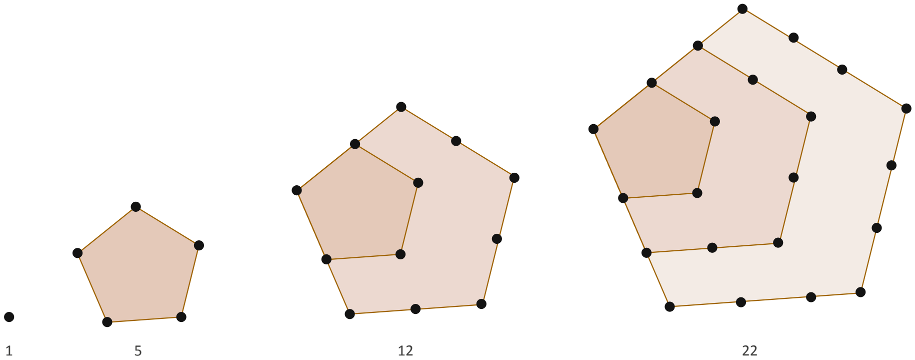


Figura 1.10. Números pentagonales.

Números figurados planos

En general, todos los números figurados se pueden obtener a partir de semirrectas que parten de un mismo punto. Con dos semirrectas, se construyen números triangulares; con tres semirrectas los números figurados que se obtienen son cuadrados. Con cuatro semirrectas se obtienen números pentagonales y sí se tienen n semirrectas, se obtienen números figurados con $n + 1$ lados [5].

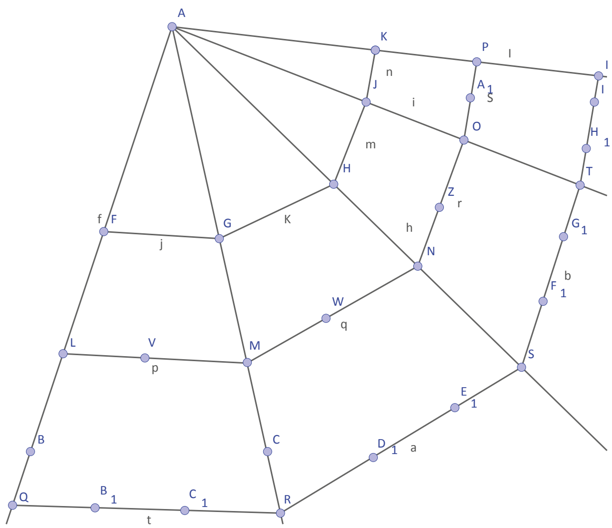


Figura 1.11. Números figurados planos.

En general, todo polígono regular se puede obtener por medio de una sucesión de números escritos en términos de una progresión aritmética. Cuyo primer término es 1 y cuya razón es el número de lados que tiene el polígono menos 2. Sobre estos polígonos se pueden construir pirámides, con tantas caras triangulares como lados tiene el polígono. Estos reciben el nombre de números figurados especiales.

Números no cuadrados

Los pitagóricos oponían a los números cuadrados otros números mediante la adición de un punto a la unidad y por iteración de esta operación sobre los cuadrados resultantes.

Los números no cuadrados a partir de 2 tenían especial importancia en la aritmogeometría pitagórica:

$$2 = 2 = 1 \text{ x } 2 = 2 \text{ x } 1,$$

$$2 + 4 = 6 = 2 \text{ x } 3 = 2 \text{ x } 3,$$

$$2 + 4 + 6 = 12 = 3 \text{ x } 4 = 2 \text{ x } 6,$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \text{ x } 5 = 2 \text{ x } 10,$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 5 \text{ x } 6 = 2 \text{ x } 15,$$

$$\ldots$$

$$n(n+1) = \left[2\,\frac{n(n+1)}{2}\right].$$

Los pitagóricos decían que en tanto la suma de los números impares genera cuadrados, figuras que son semejantes entre sí, la suma de los números pares genera rectángulos no cuadrados, cuyos lados tienen medidas distintas (figura 1.12).

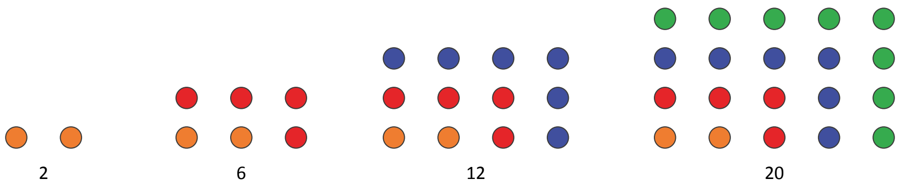


Figura 1.12. Números rectangulares.

Hacia una concepción de los números naturales

En los tiempos de Immanuel Kant (1724-1804), dos teorías representaban los pilares de la ciencia fueron para él referentes fundamentales: la mecánica de Newton y la geometría de Euclides. La primera era todavía una novedad en pleno proceso de desarrollo, pero la geometría euclidiana tenía más de dos milenios (gracias a que los árabes la conservaron) y se encontraba más de allá de toda duda, ya que representaba la esencia misma de la racionalidad.

De hecho, la teoría de Newton estaba soportada en la antigua geometría del genio griego. Los mismos fundamentos de razonamiento se reflejan también, por ejemplo, en las categorías a priori kantianas. Euclides, en sus *Elementos* (13 libros en total), reunió el saber geométrico de su época (finales del siglo IV a. C. e inicios del III a. C.), desarrolló la obra de los grandes matemáticos griegos —por ejemplo, la del compañero de Aristóteles, Eudoxo de Cnido— e incluyó sus propias aportaciones, exponiéndolas con un método axiomático-deductivo (se le atribuye el primer sistema axiomático de la matemática), su gran legado. Spinoza, por ejemplo, expuso su ética al modo geométrico como criterio de rigurosidad. Kant posiblemente no conoció nunca a Gerolamo Saccheri, un jesuita italiano nacido en 1667 que inventó —sin saberlo— una geometría diferente a la de Euclides. Pocos años después de la muerte de Newton, en 1733, cuando Kant era apenas un niño de 9 años, Saccheri, quien llegaba al final de su vida, publicó en Milán un libro asombroso, que sin embargo no trascendería, titulado *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*, lo que traducido libremente significa «Euclides libre de todo defecto».

El objetivo de Saccheri era todo lo contrario de lo que logró; se proponía fortalecer la geometría euclidiana tratando de reducir al absurdo las posibilidades de desarrollos geométricos alternativos. Y efectivamente sus resultados fueron tan extraños que él los consideró absurdos en su momento. Hoy, por el contrario, podemos decir que, desde el punto de vista lógico, los teoremas desarrollados por Saccheri no son absurdos, por más que parezcan bastantes raros y antiintuitivos, pues son perfectamente consistentes, carentes de contradicción y, por ende, legítimos teoremas matemáticos [6].

El camino explorado por Saccheri partía de negar el famoso quinto postulado de Euclides: «Dada una recta L y un punto P exterior a la recta dada, existe una y solo una línea M que contiene a P y es paralela a L». El quinto postulado se puede resumir de la siguiente forma: «Por un punto exterior a una recta solo puede trazarse una recta paralela».

Desde los tiempos antiguos se consideraba que los postulados (verdades absolutas comunes a todas las ciencias) y los axiomas (verdades absolutas para una ciencia en particular) eran verdades evidentes y, por tanto, no necesitaban demostración. De estas verdades generales se derivaban, por deducción, teoremas particulares. Los postulados y los axiomas son los pilares del edificio matemático o al menos de cada teoría. Ahora bien, este quinto postulado, a diferencia de los demás, no parecía ser tan evidente ni podía ser demostrado o derivado a partir de otros, lo cual resultaba ser fuente de inquietud o incomodidad en los matemáticos. El propio Euclides fue consciente de este punto débil. Y es que era muy fácil negar el postulado, lo cual podía hacerse de dos formas: planteando que por el punto exterior a la línea o recta no podía pasar ninguna paralela o que podía pasar un número plural de paralelas. En cualquiera de los dos casos, se estaría negando el quinto postulado, y ello, supuestamente, conduciría a contradicciones en el sistema.

Saccheri quería demostrar que asumir que podían pasar más de una paralela por P también implicaba inconsistencias en el sistema. Los teoremas que formuló eran extraños, pero de ningún modo contradictorios. De hecho, eran teoremas de una geometría no euclidiana, pero era tal el prestigio de Euclides y el arraigo profundo de su geometría en la mente de los matemáticos y de los no matemáticos, que tuvieron que pasar casi cien años para que alguien diera el siguiente paso.

La primera persona que desarrolló de manera consciente una geometría no euclidiana, entendiéndola precisamente como una nueva geometría, fue el matemático ruso Nicolái Ivánovich Lobatchevski (1792-1856), que en 1829 publicó un artículo en el *Kazan Bulletin* (*Boletín de Kazán*), en el cual proponía una nueva geometría, siguiendo la misma dirección en que había trabajado Saccheri un siglo antes, afirmando la pluralidad de paralelas por un punto exterior a una recta. Casi simultáneamente, en 1832, pero de forma independiente, el húngaro János Bolyai (1802-1860) escribió un apéndice al libro de su padre, Wolfgang Farkas Bolyai, con el título de «La ciencia absoluta del espacio», en el cual se hace referencia al uso de una nueva geometría [7].

Con las nuevas geometrías, la matemática cayó en una profunda crisis, puesto que se concluyó que no había verdad absoluta. La geometría pasó a ocupar un lugar secundario, haciendo necesario el planteamiento de sistemas axiomáticos que partieran de principios lógicos sobre los cuales se construyeran de forma rigurosa las distintas teorías matemáticas.

De este modo, surgió la teoría de conjuntos como una nueva rama de la matemática. A finales del siglo XIX y principios del XX, Georg Cantor (1845-1918) formuló de manera individual la teoría de conjuntos. Su objetivo era formalizar las matemáticas, comenzando con el análisis de las bases de las matemáticas, basándose para ello en los conjuntos (por ejemplo, la definición de función se hace estrictamente por medio de conjuntos). Este monumental trabajo logró unificar las matemáticas y permitió la comprensión de nuevos conceptos. Su obra fue admirada y condenada simultáneamente por sus contemporáneos. Desde entonces, los debates sobre la teoría de conjuntos han sido siempre apasionados, sin duda, por hallarse estrechamente conectados con importantes cuestiones lógicas.

Según la definición de conjunto de Cantor, este es «una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto». Gottlob Frege (1848-1925) fue uno de los admiradores de la nueva teoría de Cantor, y dio una definición de conjunto similar [8]. En 1903 Bertrand Russell (1872-1970) demostraría que la teoría de conjuntos de Cantor era inconsistente y cuestionaría su definición de conjunto [9]. Pero pronto la teoría axiomática de Zermelo (1908) y refinamientos de esta debidos a Fraenkel (1922), Skolem (1923), von Newman (1925) y otros sentaron las bases para la teoría de conjuntos actual. Es indiscutible el hecho de que la teoría de conjuntos es una parte de las matemáticas, y, además, la teoría matemática dónde se fundamenta la aritmética.

Las teorías de los números naturales basadas en los números ordinales se pueden trasladar de la teoría de conjuntos a la teoría moderna axiomática. Según Cantor y Zermelo, los números naturales se definen como los números ordinales finitos.

Se trata de dar una caracterización de finitud de los números ordinales sin utilizar el concepto de número natural. En cambio, si suponemos conocida la serie de los números naturales $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ entonces los números ordinales finitos se caracterizan como los tipos de orden de los segmentos de esta serie determinados por elementos conocidos de la siguiente forma: el tipo de orden dado por el segmento n, es decir, $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$ es precisamente el número ordinal finito que vamos a identificar con el número natural n. Este resultado se puede apreciar en la siguiente proposición:

Proposición 1.1. *Un conjunto ordenado C con una relación de orden < (menor que) escrito tiene el mismo tipo de orden de un segmento de la serie de los números naturales, si y solo si es doblemente bien ordenado, es decir, cada subconjunto no vacío de contiene un elemento mínimo y un elemento máximo con respecto al orden < definido sobre .*

Con esta proposición, se da la posibilidad de definir el concepto de número natural como el tipo de orden de un conjunto doblemente bien ordenado. La proposición 1 nos dice que esta definición está conforme con el concepto intuitivo de número natural:

Definición 1.5. *Llamaremos número natural al tipo de orden de un conjunto doblemente ordenado.*

Con esta definición, es posible desarrollar una teoría del número natural basada en ella. Surge la tarea de definir los conceptos de cero y de sucesor, y demostrar después la validez de los axiomas de Giuseppe Peano, conocido por sus contribuciones a la lógica y a la construcción axiomática del número natural.

Definición 1.6. *El número natural cero es, por definición, el tipo de orden del conjunto vacío (en el conjunto vació solo se puede definir un orden, el llamado orden vacío).*

Definición 1.7. *Sea (C,<) un conjunto doblemente ordenado y llamemos a su tipo. Entonces, llamaremos sucesor de al tipo de orden del conjunto (C,<) que se obtiene al agregar a (C,<) un único elemento c´ mayor que todos los elementos c ∈ C.*

La definición 1.7 es unívoca. Esto significa que el tipo de orden ω construido en ella no depende del conjunto ordenado $(C,<)$ ni del carácter especial del elemento c'. Sin embargo, hay un problema con la definición: ¿De dónde se puede tomar el elemento c' que se debe agregar a C? ¿Existe tal elemento que no pertenezca a un conjunto dado?

Ernst Zermelo (1871-1953) dio la demostración de la existencia del elemento c'. En ella se lleva de vuelta a la famosa paradoja de Russell, que muestra la inexistencia del conjunto universal. Sin embargo, la demostración de Zermelo sigue siendo válida en sistemas axiomáticos de la teoría de conjuntos en los cuales la paradoja de Russell está eliminada.

Los axiomas de Peano

En 1889, Peano publicó, en un pequeño libro escrito en latín, titulado *Arithmetices principia*, su primera versión de una axiomatización de las matemáticas en un lenguaje simbólico. En dicho libro, aparecieron por primera vez sus famosos axiomas, en los que usó la lógica de George Boole (1815-1864) y Ernst Schöder (1841-1902), para establecer una analogía entre operaciones geométricas y algebraicas con las operaciones de la lógica, introduciendo algunas innovaciones: por ejemplo, usó diferentes símbolos para las operaciones lógicas y matemáticas, distinguiendo entre las proposiciones categóricas y las condicionales; formuló una teoría de cuantificación (Frege ya había avanzado en este aspecto, pero Peano no conocía su trabajo), y fijó prácticamente toda su simbología, más sencilla de comprender que la de Frege. Peano se hizo popular entre los matemáticos de la época y, junto con algunas modificaciones realizadas por Whitehead y Russell, su trabajo se convirtió en el lenguaje común de la lógica matemática [10].

Por otra parte, desde la aritmética, se reconocen los aportes de Richard Dedekind (1831-1916) y Hermann Grassmann (1809-1877). Su trabajo influyó en la formulación de la geometría de David Hilbert (1862-1943) y en el tratamiento de la lógica matemática de Whitehead y Russell.

En teoría, la obra *Arithmetices principia* de Peano consiste en un prefacio y diez secciones:

1. Números y adición
2. Sustracción
3. Máximos y mínimos
4. Multiplicación
5. Potenciación
6. División
7. Teoremas varios
8. Razones de números
9. Sistemas de racionales e irracionales
10. Sistemas de cantidades.

Las demostraciones son una lista de fórmulas, cada una relacionada con la siguiente, pero no pruebas formales, puesto que no enuncia reglas de inferencia. La noción del condicional $a \supset b$ que Peano interpreta como «de a se deduce b» (o a implica b), se utiliza de manera natural en el texto y no usa valores de verdad.

Al principio, presenta una lista de las nociones aritméticas iniciales (que él llama «explicaciones»): número, uno, sucesor y «es igual a», para cada una de ellas respectivamente [10]:

a. El signo significa número.

a. El signo 1 significa unidad.

a. El signo significa el sucesor de x.

Peano formula nueve axiomas, los cuales se mencionan a continuación (representaremos el conjunto de los números naturales por medio del símbolo ℕ). Para su comprensión, se requiere que el estudiante esté familiarizado con algunas de las notaciones más comunes que se utilizan en la teoría de conjuntos, como se describió en el apartado 1.3.

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. $x \in \mathbb{N}\ \ x = x$.
3. $x,\ \ y \in \mathbb{N} \supset\ x = y$, entonces $y = x$.
4. $x,\ \ , z \in \mathbb{N} \supset\ x = y,\ y = z$ entonces $x = z$.
5. $x = y,\ y \in \mathbb{N} \supset\ x \in \mathbb{N}$.
6. $x \in \mathbb{N} \supset x + 1 \in \mathbb{N}$.
7. $x, y,\ \in \mathbb{N} \supset\ x =$y, entonces $x + 1 = y + 1$.
8. 0 no es antecesor de ningún número natural.
9. $k \in K$ tal que $0 \in K$ tal que $x \in \mathbb{N}$, $x \in$ K $\supset x + 1 \in k :: \supset \mathbb{N} = K$.

Los axiomas 2, 3, 4 y 5 se refieren a la igualdad y pertenecen a lógica fundamental. Los restantes cinco axiomas son conocidos como los axiomas de Peano. El axioma 6 establece que para cada número natural existe un sucesor en los números naturales, y el axioma 7 afirma que el sucesor de cada número natural es único y que dos números distintos tienen diferente sucesor. El axioma 8 indica que 0 no es sucesor de ningún número natural y, por tanto, es el primero. El axioma 9, también es conocido como el **principio de inducción matemática:** Si K es un conjunto tal que $0 \in K$, $x \in K$ y $x + 1 \in K$, entonces todos los números naturales pertenecen a K.

Los axiomas 1, 6, 7 y 8 se utilizan como soporte para sustentar la validez de la demostración por inducción, que sirve para comprobar que una determinada propiedad se cumple para todo número natural.

Puesto que el conjunto de los números naturales es infinito, como consecuencia del axioma 6, es natural pensar que si un número natural cumple una propiedad específica, su sucesor también ha de cumplirla. Con ello, se garantiza que todo número natural cumple con las condiciones dadas.

En su forma más básica, el principio de inducción se desarrolla en dos etapas [11]:

Paso 1. Se demuestra que 0 cumple la propiedad.

Paso 2. Se parte de la suposición (**hipótesis de inducción**) de que un número natural m cumple con la propiedad. A continuación, se demuestra que $m+1$ también la cumple. Si este es el caso, se concluye que la propiedad en cuestión la cumplen todos los números naturales.

Ejemplo

Demuestre que para todo número natural n,

$$0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Para ello, se siguen los siguientes pasos:

Paso 1. Se valida que 0 cumple con la condición dada:

$$0=\frac{0(0+1)(2(0)+1)}{6}=\frac{0(1)(1)}{6}=\frac{0}{6}=0.$$

Paso 2. Se supone que la propiedad es válida para un número natural (a este paso se le conoce como hipótesis de inducción):

$$0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+m=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Debemos comprobar que la propiedad es válida para el sucesor de m.

Por tanto, $(m+1)^2$ sumando en ambos lados de la igualdad, obtenemos que

$$\begin{aligned}0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots m^2+(m+1)^2 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2\\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)+6(m+1)^2}{6}.\end{aligned}$$

Observemos que $(m+1)$ es común en ambos términos del numerador. Por tanto,

$$\frac{m(m+1)(2m+1)+6(m+1)^2}{6}+\frac{(m+1)[m(2m+1)+6(m+1)]}{6}.$$

Luego, se aplica la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}\frac{(m+1)[m(2m+1)+6(m+1)]}{6} &= \frac{(m+1)[2m^2+m+6m+6)]}{6}\\ &= \frac{(m+1)[2m^2+7m+6]}{6}.\end{aligned}$$

Factorizando la expresión $2m^2 + 7m + 6 = (m+2)(2m+3)$ se tiene que

$$\frac{(m+1)\left[2m^2+7m+6\right]}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

En la expresión anterior, es claro que $m+2$ es el sucesor de $m+1$. De igual manera, $2m+3$ es el sucesor de $2m+2$, luego

$$\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} = \frac{(m+1)\left[(m+1)+1\right]\left[(2m+2)+1\right]}{6}.$$

En la expresión $\frac{(m+1)[(m+1)+1][(2m+2)+1]}{6}$ se tiene que $2m+2 = 2(m+1)$ de modo que entra en juego el sucesor de m. Por tanto,

$$\frac{(m+1)\left[(m+1)+1\right]\left[(2m+2)+1\right]}{6} = \frac{(m+1)\left[(m+1)+1\right]\left[2(m+1)+1\right]}{6}$$

Así, se ha demostrado la validez de la propiedad.

Operaciones con números naturales

Peano introduce la adición, la multiplicación y la potenciación como definiciones 4, 5 y 6, respectivamente, las cuales se presentan a continuación como definiciones 1.8, 1.9 y 1.10, para mantener el consecutivo.

Definición 1.8. *Adición de números naturales (definición 4 de Peano):*

$$x, y \in \mathbb{N} \supset x + (y+1) = (x+y) + 1$$

La anterior definición significa que si x, y son números naturales y si (x, y) es otro número natural, $(x, y) + 1$ existe y es un número natural, el cual se define como el sucesor de (x, y) [10].

Si bien al sucesor de x se nota por medio del número natural $x+1$, se puede utilizar el símbolo $x^{+} = x+1$. De este modo, si $n, = 8$, $n^{+} = 9$.

La anterior definición de suma, la podemos representar como $x, y \in \mathbb{N} \supset x + y^{+} = (x+y)^{+}$. En efecto, $6 + 5^{+} = (6+5)^{+} = 12$.

Mediante la definición propuesta, Peano probó que la adición de números naturales cumple las siguientes características:

Si a, b y $c \in \mathbb{N}$, entonces

- $a + b = b + c$ (conmutatividad);
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asociatividad);
- $a + 0 = 0 + a = a$ (se dice que 0 es elemento neutro de la adición);
- si $a + b = c + b$ entonces $a = c$ (cancelativa).

Definición 1.9. *Multiplicación de números naturales (definición 5 de Peano):*

$$x \in \mathbb{N} \supset x \cdot 1 = x, \text{ tal que } x,y \in \mathbb{N} \supset x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x,$$

$$\text{luego } x \cdot y^{+} = x \cdot y + x.$$

$$\text{En efecto, } 4 \text{ x } 5^{+} = 4 \text{ x } 5 + 4 = 24.$$

Al igual que la adición, la multiplicación de números naturales cumple las siguientes características, expuestas y probadas por Peano [10]:

Si , entonces

- $a \cdot b = b \cdot c$ (conmutatividad);
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociatividad);
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (se dice que 1 es elemento neutro de la multiplicación), y
- (distributiva de la multiplicación respecto a la adición).

Definición 1.10. *Potencias de un número natural (definición 6 de Peano):*

$$x \in \mathbb{N} \supset x^{1} = x$$

$$x,y \in \mathbb{N} \supset x^{y+1} = x^{y} \cdot x.$$

Tenemos, entonces, que $3^{4+1} = 3^{4} \cdot 3 = 81 \cdot 3 = 243$.

Como se puede observar, las definiciones 1.9 y 1.10 (5 y 6 de Peano) son recursivas, en el sentido de que se define para un primer número y luego se define para el sucesor de un número cualquiera con base en el número; pero no hay justificación para este tipo de definiciones en el sistema de Peano, pues su criterio de definición es que el lado derecho de una ecuación de definición es un «agregado de signos que tienen un significado» y tampoco afirmó que estas definiciones fueran eliminables o deducibles de la teoría.

La resta y la división no son operaciones, puesto que no siempre el resultado de sustraer un número natural de otro es un número natural.

Ejemplo

$2 - 5$, $9 - 23$, $134 - 543$.

Algo similar ocurre con la división. El cociente de dos números naturales no siempre es un número natural.

Ejemplo

$10 \div 12$, $56 \div 9$, $13 \div 7$.

https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

A pesar de ello, en la práctica, la división resulta especialmente útil cuando el cociente es un número natural. El concepto de divisor se utiliza de manera natural en la construcción de otros conceptos de la matemática y, por tanto, adquiere un valor supremamente importante.

DEFINICIÓN 1.11 *Sean y números naturales, con distinto de cero. Entonces, b divide a a escrito b\a, si existe un número natural c tal que a = cb. Se dice que b es un divisor de a, o lo que es equivalente, a es un múltiplo de b.*

Si un número natural tiene exactamente dos divisores, se llama ***primo.*** *Si es distinto de 1 y no es primo, se llama* ***compuesto.***

PROPOSICIÓN 1.2. *Sean a, b, c, d ∈ ℕ, se cumplen las siguientes relaciones, en las cuales, el símbolo \ se lee «divide a»:*

1. Si *a\b y b\a, entonces a = b;*
2. Si *a\b y b\c, entonces a\c;*
3. Si *c\(a + b) y c\a, entonces c\b;*
4. Si *a\b y b, entonces a\bc.*

Ilustremos estas propiedades mediante algunos ejemplos:

1. Si *a\b y b\a* necesariamente *a = b*, ya que, de no ser así, suponiendo que *a > b* y que *b\a,* es claro que *a* no puede dividir a *b*.
2. Como 3\9 y 9\27 entonces 3\27.
3. Puesto que 4\(20+8) y 4\20 entonces 4\8.
4. Dado que 5\15 entonces 5*b* · 15, es decir, 5 divide a cualquier múltiplo de 15.

PROPOSICIÓN 1.3. *Todo número natural mayor o igual que* 2*, o es primo o es producto de primos.*

Esta proposición se conoce como el **teorema fundamental de la aritmética,** y de ella se desprenden algunas consecuencias. La primera implica que esta descomposición en factores primos es única, salvo el orden de los factores. La segunda alude al hecho de que el conjunto de los números primos es infinito.

Para ejemplificar la primera consecuencia, tenemos que el número 486 se puede escribir como:

$$486 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3^5.$$

A propósito de esta última apreciación, la descomposición de un número natural compuesto mayor que 1, permite establecer también su número de divisores:

En el ejemplo anterior, como $486 = 2^1 \cdot 3^5$, al tomar los exponentes de los factores primos (2 y 3), es decir, 1 y 5, respectivamente, al sumar 1 a cada uno de ellos y calcular luego su producto, se tiene que 486 tiene exactamente 12 divisores. Esto es,

$$(1 + 1) \cdot (5 + 1) = 2 \cdot 6 = 12$$

En efecto, los divisores de 486 son

$$D_{486} = \{1,2,3,6,9,18,27,54,81,162,243,486\}$$

En lo que respecta a la segunda consecuencia, Euclides demostró, desde la Grecia clásica, que el conjunto de los números primos es infinito. Para ello, supuso que este conjunto es finito, es decir, se pueden contar sus elementos. Consideró un número natural a de la forma: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n + 1$ con cada uno de los p_i números primos e i un número natural.

El número a es el producto de todos los números primos más 1. Si se divide a por cualquiera de los primos del conjunto, vemos que el residuo siempre es 1. Es decir, a no tiene como divisor a ninguno de estos primos.

Si fuese primo, existiría un elemento más del conjunto de los números primos y no hay más. Por tanto, no es primo y debe tener algún divisor primo, algo que no es posible, porque el resto de la división por cualquier número primo siempre es 1.

Euclides describió algunas estrategias para obtener números primos. Por ejemplo, al considerar los primeros tres números primos (2, 3 y 5) su producto es un número compuesto (30). Sin embargo, al sumarle 1 a dicho resultado, este será un número primo (31). De manera similar ocurre con otros números.

Así, el producto de los primeros diez números primos es

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 223092870.$$

Su sucesor, el número 223092871 es, en efecto, un número primo.

Decidir si un número natural dado es primo o compuesto no siempre es una tarea sencilla. Si n es un número natural muy grande, probar que n únicamente puede ser divisible por 1 y por sí mismo es complejo y requiere de una cantidad elevada de cálculos.

Es posible determinar si un número n es primo o compuesto tomando todos los divisores menores a la $\sqrt{n}$, como se observa en la proposición 1.4.

Proposición 1.4. *Sean : a, b, n* $\in \mathbb{N}$, $a > 1$, $b > 1$ *y* $n > 1$*:*

1) Si $n = ab$ *entonces* $a \leq n$ o $b \leq n$.

2) *Si n no tiene divisores primos menores o iguales a* $\sqrt{n}$*, entonces n es primo.*

Por ejemplo, 131 es primo, porque no es divisible entre ninguno de los números primos menores que $\sqrt{131} \sim 11{,}4$. En efecto,

$$131 \div 2 = 65 \text{ y resto } 1,$$

$$131 \div 3 = 43 \text{ y resto } 2,$$

$$131 \div 5 = 26 \text{ y resto } 1,$$

$$131 \div 7 = 18 \text{ y resto } 5,$$

$$131 \div 11 = 11 \text{ y resto } 10.$$

Algunos números naturales tienen un comportamiento bastante interesante. Por ejemplo, aquellos números de la forma $2^n - 1$ adquieren especial interés cuando se desea determinar si son primos o no. A los números primos de esta forma se les conoce como primos de Mersenne [12].

Se denominan así en memoria del filósofo del siglo XVII Marin Mersenne (1548-1648), quien en su obra *Cognitata physico-mathematica* enunció una serie de postulados sobre ellos que solo pudo refinarse tres siglos después. También compiló una lista de números primos con exponentes menores o iguales a 257, y conjeturó que eran los únicos números primos de esa forma. Su lista solo resultó ser parcialmente correcta, ya que, por error, incluyó los números 67 y 257, que son compuestos, y omitió los números 61, 89 y 107, que son primos. Además, su conjetura se revelaría falsa con el descubrimiento de números primos de Mersenne más grandes. No proporcionó ninguna indicación de cómo dio con esa lista, y su verificación rigurosa solo se completó más de dos siglos después.

A continuación, se presentan algunos números de la forma $2^n - 1$ con el propósito de observar si son primos o no lo son:

$$2^2 - 1 = 3\text{: primo,}$$

$$2^3 - 1 = 7\text{: primo,}$$

$$2^4 - 1 = 15\text{: compuesto,}$$

$$2^5 - 1 = 31 \text{ primo,}$$

$$2^6 - 1 = 63 \text{ compuesto,}$$

$$2^7 - 1 = 127 \text{ compuesto.}$$

A la fecha de publicación de este libro, el número primo más grande de Mersenne conocido es $2^{82589933} - 1$, descubierto en diciembre de 2018, para un total de 51 primos de Mersenne.

Cálculos en WolframAlpha

Podemos determinar la descomposición factorial de un número natural dado en factores primos, mediante el uso del comando *factor(n)* (figura 1.13).

Figura 1.13. Descomposición factorial de un número natural dado en factores primos, mediante el uso de WolframAlpha.
(Wolfram|Alpha, «factor(100)» Wolfram Alpha LLC. https://www.wolframalpha.com/input?i=factor%28100%29&lang=es [acceso: 22 de marzo, 2023]).

Con esta interesante herramienta podemos saber, además, si un número dado es primo o no, así como determinar todos sus divisores.

Máximo común divisor

Sean a y b dos números naturales mayores que cero. El mayor de todos los divisores comunes de a y b recibe el nombre de máximo común divisor. Suele notarse mediante la expresión MCD(a,b) o simplemente (a,b). Si dados dos números naturales a y b se tiene que (a,b) = 1, se dice que a y b son primos relativos. De este modo, 4 y 5 son primos relativos, puesto que el único divisor que conservan en común es 1.

A manera de ejemplo, para hallar el MCD entre 320, 454 y 380, se encuentran sus divisores comunes mediante su descomposición en factores primos:

$$\begin{array}{ccc|c} 320 & 454 & 380 & 2 \\ 160 & 227 & 190 & 2 \\ 80 & 114 & 95 & \end{array}$$

Nótese que 80, 114 y 95 no tienen más divisores en común. Por tal razón,

$$\text{MCD}(320, 454, 380) = 2 \times 2 = 4$$

Aplicación

Cierta empresa elabora tres tipos de aceite, cada uno con características de calidad diferentes. Del primer tipo, en un día, se producen 5600 litros; del segundo, 7650 litros, y del tercero, 8900 litros. Cada producto se desea envasar en contenedores del mismo tamaño. ¿Cuál debe ser la capacidad máxima de cada contenedor para que los tres tipos de aceite queden almacenados en igual cantidad sin desperdiciar absolutamente nada?

Solución

Calculamos el máximo común divisor de 5600, 7650 y 8900:

$$\begin{array}{ccc|c} 5600 & 7650 & 8900 & 2 \\ 2800 & 3825 & 4450 & 5 \\ 560 & 765 & 890 & 5 \\ 112 & 153 & 178 & \end{array}$$

El MCD(5600, 7650, 8900) = $2 \times 5 \times 5 = 50$, lo que implica que la capacidad máxima de cada contenedor ha de ser 50 litros para el almacenamiento de cada tipo de aceite.

Mínimo común múltiplo

El menor de los múltiplos comunes de dos números naturales y , se denomina el mínimo común múltiplo de a y b, el cual se escribe MCD(a, b) o [a, b].

Puesto que el mínimo común múltiplo de dos números no es otra cosa que el más pequeño de sus múltiplos comunes, para calcularlo se descomponen ambos números en su totalidad, para luego multiplicar los factores primos obtenidos. Si ambos números se descomponen de manera simultánea, se escribe un divisor de modo tal que divida al menos a uno de los dos números dados, para luego continuar con el proceso hasta que ambos números se conviertan en unos. De este modo, a manera de ejemplo, calculemos el MCD(32, 42)

32	42	2
16	21	2
8	21	2
4	21	2
2	21	2
1	21	3
	7	7
	1	

Por tanto, MCD(32, 42) = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 7 = 672

Esto significa que entre todos los múltiplos comunes de 32 y 42, el menor de ellos es 672.

Aplicación

Una empresa posee tres sucursales distintas A, B y C. Cuando el sistema operativo de alguna de las sucursales es reiniciado, todas las computadoras dejan de funcionar por un tiempo. De este modo, las otras dos sucursales deben asumir las tareas inconclusas de la otra sucursal.

Si los ingenieros plantean que el sistema operativo de la sucursal A es reiniciado cada 36 días; el de la sucursal B, cada 40 días, y el de la sucursal C, cada 56 días, ¿cuántos días han de pasar para que los tres sistemas se reinicien al mismo tiempo?

Solución

Al calcular el mínimo común múltiplo de 36, 40 y 56, se tiene que

36	40	56	2
18	20	28	2
9	10	14	2
9	5	7	3
3	5	7	3
1	5	7	5
	1	7	7
		1	

Por tanto,

$$\text{MCD}(365, 40, 46) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$$

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Entonces, se concluye que todas las computadoras dejarán de funcionar por un tiempo al cabo de 2520 días.

Cálculos en WolframAlpha

- Calcular el MCD de 243 y 405.

En WolframAlpha, se introduce el comando gcd(243, 405), forma abreviada de la expresión en inglés (*greatest common divisor*); con ello, se calcula su máximo común divisor. Se puede visualizar la descomposición factorial de cada uno de los números dados (figura 1.14).

Figura 1.14. Cálculo del máximo común divisor en WolframAlpha.
(Wolfram|Alpha, «gcd(243,405)» Wolfram Alpha LLC. https://www.wolframalpha.com/input?i=gcd%28243%2C405%29&lang=es [acceso: 28 de marzo, 2023]).

- Calcular el MCM de 200 y 420.

En WolframAlpha, se introduce el comando lcm(200, 420), forma abreviada de la expresión en inglés (*least/lowest common multiple*); con ello, calculamos su mínimo común múltiplo (figura 1.15).

Figura 1.15. Cálculo del mínimo común múltiplo en WolframAlpha.
(Wolfram|Alpha, «lcm(200, 420)» Wolfram Alpha LLC.. https://www.wolframalpha.com/input?i=lcm%28200%2C%E2%80%89420%29 [acceso: 22 de marzo, 2023]).

Los números enteros

> Los números son los elementos de todas las cosas
> siendo el cielo armonía y número
>
> Pitágoras

Los números negativos se remontan al siglo V en Oriente, pero llegan a Occidente solo hasta el siglo XVI. En Oriente, se manipulaban tanto números positivos como negativos mediante el uso efectivo del ábaco, tablillas o bolas de distintos colores. En la práctica, los chinos utilizaron los números negativos, pero no pudieron dar un significado concreto al resultado derivado de una ecuación cuyo resultado fuese menor que cero. Fue la cultura india, que al emplear créditos y débitos en sus intercambios comerciales dio un significado a estos números, usando símbolos para su representación numérica.

Los griegos, por otra parte, utilizaron magnitudes negativas en el desarrollo de sus teoremas en álgebra geométrica, de manera implícita, en los procesos asociados a restas, aplicando la propiedad distributiva como se muestra en la figura 1.16.

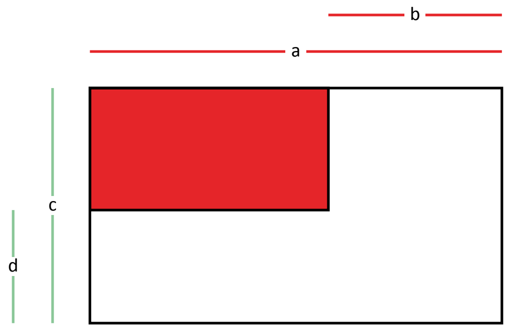


Figura 1.16. Aplicación de la propiedad distributiva en un rectángulo.

Para calcular el área del rectángulo en rojo, utilizaron la expresión

$$(a - b)\,(c - d) = ac - ad - bc + bd,$$

dejándolos como restas indicadas.

Sin embargo, fueron los hindúes los encargados de interpretar las cantidades negativas mediante el planteamiento de reglas y estrategias de solución.

Los números negativos llegaron a Europa a través de textos árabes, tal y como se presentaron los números naturales. Sin embargo, la mayoría de los matemáticos de los siglos XVI y XVII no los aceptaban como números, a pesar de su gran utilidad en la solución de cálculos financieros o la resolución de ecuaciones. Fue solo hasta el siglo XIX cuando los números naturales se constituyeron en la base de las matemáticas, de tal modo que los demás números son construcciones formales basadas en operaciones y combinaciones finitas justificadas [13].

Construcción de los números enteros a partir de los números naturales

El propósito de este apartado es estudiar la implementación de una relación de equivalencia definida sobre el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que permita construir el conjunto de los números enteros.

Para construir el conjunto de los números enteros a partir de los números naturales, se considera el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) / a, b \in \mathbb{N}$. Si se considera un sistema cartesiano determinado por dos semirrectas perpendiculares entre sí, de tal manera que sobre cada una de ellas disponemos los números naturales, podemos construir parejas ordenadas, como se puede apreciar en la figura 1.17.

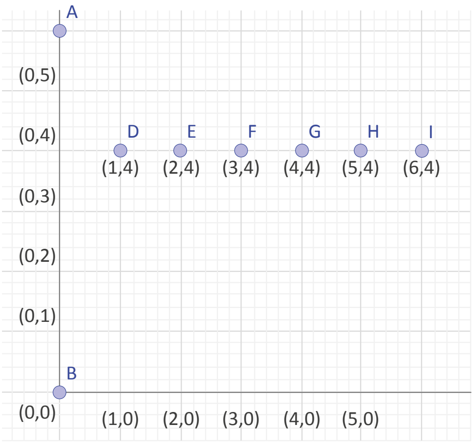


Figura 1.17. Disposición de parejas de números naturales en el plano cartesiano.
(Gráfica elaborada con GeoGebra, software libre disponible en https://www.geogebra.org).

Sea R una relación definida sobre el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (ver definición 1.3) como $(a, b)\ R\ (c, d)$ si y solamente si $a + b = b = c$. Esta es una relación de equivalencia en la cual distintas parejas representan el mismo punto. Por ejemplo, $(1, 3)\ R\ (4, 6)$, porque $1 + 6 = 3 + 4$. Análogamente, se pueden encontrar infinitas parejas que cumplen esta condición:

$$(1, 3)\ R\ (5, 7), \text{ porque } 1 + 7 = 3 + 5,$$

$$(1, 3)\ R\ (6, 8), \text{ porque } 1 + 8 = 3 + 6,$$

$$(1, 3)\ R\ (7, 9), \text{ porque } 1 + 9 = 3 + 7,$$

$$(1, 3)\ R\ (8, 10), \text{ porque } 1 + 10 = 3 + 8,$$

$$(1, 3)\ R\ (9, 11), \text{ porque } 1 + 11 = 3 + 9.$$

Nótese que R es una relación de equivalencia:

a. Es reflexiva. Para todo $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b)\ R\ (a, b)$.

Esta proposición implica que se debe probar que $(a, b)\ R\ (a, b)$. para toda pareja de números naturales.

En efecto, $(a, b)\ R\ (a, b)$, puesto que $(a, b)\ R\ (a, b)$ implica que $a + b = a + b$ (definición de la relación) (1)

Entonces, $a + b = a\ \ +b$, aplicando la conmutatividad en (1) (definición 1.4). (2)

b. Es simétrica. Para todo a, b, c, $d \in \mathbb{N}$, si $(a, b)\ R\ (c, d)$ si entonces $(c,d)\,R\,(a,b)$, puesto que $(a,b)\,R\,(c,d)$, $a+d=b+c$ (definición de la relación). (2)

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Como $a + d = b + c$ se tiene que $b + c = a + d$ la igualdad es una relación simétrica.(3)

Aplicando la conmutatividad en (3), $b + c = a + d$ implica que $c + b = a + d$. (4)

luego $(c, d)\ R\ (a, b)$.

c. Es transitiva. Para todo a, b, c, d, e, f ف $\mathbb{N}$, si $(a, b)\ R\ (c, d)$ si y $(c, d)\ R\ (e, f)$ entonces $(a, b)\ R\ (e, f)$.

Si $(a, b)\ R\ (c, d)$ y $(c, d)\ R\ (e, f)$, entonces, $a + d = b + c$, y $c + f = d + e$. (5)

Sumando los términos correspondientes de ambas expresiones a ambos lados de la igualdad, se obtiene que $a + d + c + f = b + c + d + e$ (6)

Y aplicando la propiedad cancelativa de la adición en (6), resulta que $a + f = b + e$, (definición 1.4).

Finalmente, $(a, b)\ R\ (e, f)$.

Al respecto, se plantean a continuación algunas consideraciones:

- Las parejas ordenadas (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), etcétera, pertenecen a la clase de equivalencia de (0, 0), puesto que 0 + 1 = 0 + 1, 0 + 2 = 0 + 2, 0 + 3 = 0 + 3, etcétera. Puede afirmarse entonces que [0, 0] = {(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4),...}. En consecuencia, la pareja ordenada (0, 0) es la representante de un conjunto infinito de parejas que son equivalentes a ella. En adelante, a esta clase de equivalencia [0, 0] se la denotará con el símbolo [0, 0] y se llamará el **0 entero.**

- La clase [1, 0] = {(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4),...}representa el **1 entero** mientras que la clase [0, 1] = {(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5),...} representa al **−1 entero.**

- Cada pareja (a, b) pertenece a una y solamente una clase de equivalencia. Por ejemplo. Por ejemplo, $(5, 9) \in [0, 4]$ la cual representa al **−4 entero.**

- Todo número entero positivo a estará representado por la clase de equivalencia $[a, 0]$; análogamente, todo entero negativo $-a$ estará representado por la clase de equivalencia $[a, 0]$.

- El opuesto de un número entero $[a, 0]$ es $[0, a]$.

Los números enteros son consecuencia de una relación de equivalencia construida sobre el producto cartesiano . Este conjunto se representa por medio del símbolo $\mathbb{Z}$, por tratarse de la primera letra de la palabra *zahl*, 'número', en alemán, y se representa como

$$\mathbb{Z} = \{ \dots . -n, \dots , -4, -3, -2, -1, 0,1, 2, 3, 4, \dots , n, \dots \}.$$

Es importante precisar que el cardinal de los números naturales es igual al cardinal de los números enteros y, por consiguiente, se pueden poner en correspondencia uno a uno los elementos de ambos conjuntos numéricos.

Operaciones entre números enteros

Una vez construido el conjunto de los números enteros, se procede a definir la adición y la multiplicación de números enteros. Nótese en primer lugar que, dado que un número entero es un par ordenado obtenido a partir de una relación establecida sobre los números naturales, la suma de dos números enteros ha de definirse como una de tales relaciones.

DEFINICIÓN 1.12. *Adición de números enteros*

Se utilizará el símbolo $\oplus$ *para representar la suma de dos números enteros, como sigue. Es importante precisar que el símbolo se utilizó para definir la suma de dos números naturales y no debe confundirse con la suma de números enteros: si* $[a, b]$ *y* $[c, d]$ *son dos clases de números enteros,* $[a, b] \oplus [c, d] = [a + c, b + d]$.

En efecto. $[0,8] \oplus [7,0] = [0 + 7,8 + 0] = [7,8] = [0,1]$. De manera natural, utilizamos la definición de la suma entre números enteros simplemente como $-8 + 7 = -1$.

La suma $[a, b] \oplus [c, d] = [a + c, b + d]$ está definida en términos de las sumas de los componentes de las parejas ordenadas, a + c, b + d, pero estas son sumas de números naturales que ya han sido definidas. Nótese que el símbolo $\oplus$ representa la suma de números enteros, evitando así la confusión con la suma entre números naturales, revisada anteriormente (definición 4). Sin embargo, se pone de manifiesto que en la operación $-8 + 7 = -1$en realidad estamos sumando clases de números enteros y que, si bien el símbolo + se usa en la práctica sin distinción entre la suma de números naturales y la de números enteros, este no se debe concebir de la misma forma para ambos conjuntos numéricos.

DEFINICIÓN 1.13. *Multiplicación de números enteros*

Se designará el símbolo $\oplus$ *para representar el producto de dos números enteros. Al igual que con la adición, es importante precisar que para definir la multiplicación de dos números naturales se ha utilizado como símbolo el punto medio* $(\cdot)$ *y que esta operación no debe confundirse con el producto de números enteros:*

$$[a, b] \oplus [c, d] = [a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c].$$

Nótese que $[0,5] \oplus [6,0] = [0 \cdot 6 + 5 \cdot 0,0 \cdot 0 + 5 \cdot 6] = [0,30] = [0,30]$. Esto implica que $-5 \otimes 6 = -30$.

Al igual que con la suma, se introduce un nuevo símbolo, $\otimes$, para notar es que es una operación nueva, definida sobre el conjunto de los números enteros y que, si bien

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

involucra en los cálculos la multiplicación entre números naturales, no es la misma operación. En la práctica, se suele escribir, por ejemplo, $-5 \cdot 6 = -30$. Esta simbología es correcta siempre que se sea consciente de que el símbolo se ha definido, de una forma, como producto de dos números naturales y, de otra forma, como producto de números enteros.

Cabe anotar que la resta entre números naturales es un caso especial de la adición, por lo que se define de la siguiente forma: $a \ominus b = a \oplus (-b)$.

En efecto, la operación $-6 \ominus (-8)$ la podemos expresar como $[0,6] \oplus [0,8]=[8,6]=[2,0]$, luego $-6 \ominus (-8) = 2$. Utilizando terminología conocida por el estudiante, se dice que $-6-(-8)=2$, siempre que se haga evidente que el signo menos se usa para notar una operación y la negatividad de un número entero, en este caso, -8.

Estructura de orden

Dados dos números enteros $[a, b]$ y $[c, d]$ se cumple una y solo una de las tres siguientes condiciones (ley de la tricotomía):

1. $[a, b] < [c, d]$.
2. $[a, b] = [c, d]$
3. $[a, b] > [c, d]$.

La relación de orden sobre los números enteros se define de la siguiente manera:

$$[a, b] < [c, d] \textit{ siempre que } a + d < b = c$$

Así, por ejemplo, $[0,9] < [7,0]$, porque $0 + 0 < 9 + 7$. Tenemos que, en efecto, $-9 < 7$

A continuación, algunos ejemplos:

$[0,10] < [0,8]$, porque $0 + 8 < 10 + 0$. Por tal razón, $-10 < -8$.

$[2,6] = [5,9]$, porque $2 + 9 = 6 + 5$. En consecuencia, $4 = 4$.

$[13,8] > [17, 15]$, porque $13 + 15 > 8 + 17$, luego, $5 > 2$.

Aritmética modular

A través de la historia, la aritmética modular ha influido en diferentes momentos y esferas de la actividad humana, como la teoría de números, el álgebra abstracta, la criptografía, las artes visuales y la música, entre otras. Actualmente, en la era de la tecnología, ha cobrado especial importancia, debido a la necesidad de las grandes empresas de conservar su información de forma segura y de tener acceso fácil y rápido a ella. Esto, precisamente, se logra a través del uso de códigos, en los que se aplica la factorización de números grandes.

A continuación, se refieren los conceptos básicos de la aritmética modular

Definición 1.14 *Sean a, $b \in \mathbb{Z}$, con $b > 0$. Entonces, existen enteros q y r tales que*

$a = bq + r$ con $0 \leq r < b$.

Los enteros q y r son únicos y son denominados usualmente como el cociente q y el residuo r de la división.

Se puede observar que, para $a = 342$ y $b = 46$,
$342 = 46 \times 7 + 20$.

Nótese que, para el caso de $a = 342$ y $b = 57$,
$342 = 57 \times 19$.

y, en consecuencia, b divide a a.

Definición 1.15. *En $\mathbb{Z}$, para un número dado n, se define la relación de congruencia por $a \equiv b \pmod{n}$ si y solo si n divide a $a - b$.*

A se le llama **módulo de congruencia**, y es necesario que $\dfrac{a-b}{n} = k$ para que ocurra tal relación. Obsérvese que $a - b = nk$ y, por tanto, $a = nk + b$.

Si y $a = 13$ y $b = 5$, tenemos que $13 = 2 \times 5$, luego $\dfrac{13-3}{5} = 2$.

En consecuencia, $13 \equiv 3$ (mod).

Considérese el conjunto $[a] = [x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \bmod (n)\}$.

Como $x \in [a]$, entonces $a - x = nk$ para algún entero k.

Sin embargo, en general, se desconoce si x es el residuo de esta división.

Al hacer la división entre a y n, resulta que $a = nk + r$.

De este modo, $a - r = nk$ y, en consecuencia, $a \equiv r \pmod{n}$.

Entonces, para cualquier $x \in [x]$, se tiene que $a \equiv x \pmod{n}$ y, por tanto, $x \equiv r \pmod{n}$. Esto significa que $x - r = nq$, por lo que $x = nq + r$ con $0 \leq r < n$, es decir, el residuo de dividir cualquier $x \in [a]$ por n es el mismo residuo r que resulta de dividir a entre n.

Puesto que n es un número entero fijo, hay una cantidad de posibilidades finita para el residuo r, que se obtienen al dividir a entre n:

$$r = 0, 1, 2, 3, ..., n - 1.$$

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Por lo tanto, se tienen en total clases distintas, llamadas también **clases residuales** módulo *n*, a saber:

$$[0], [1], [2], [3], \dots , [n-1].$$

Ejemplos

Sean las clases residuales módulo 7:

$$[0] = \{0,7,14,21,28,35,\dots\},$$

$$[1] =\{ 1,8,15,22,29,36,\dots\},$$

$$[2] = \{2,9,16,23,30,37,\dots\},$$

$$[3] = \{3,10,17,24,31,38,\dots\},$$

$$[4] = \{4,11,18,25,32,39,\dots\},$$

$$[5] = \{5,12,19,26,33,40,\dots\},$$

$$[6] = \{6,13,20,27,34,41,\dots\}.$$

Se puede observar que, si se escribe la clase residual de 7, se obtiene

$$[7]=\{0,7,14,21,28,35,\dots\}.$$

Y, por tanto, $[0] = [7]$.

En ese sentido, se identifican en total 7 clases residuales módulo 7.

Valga anotar que cada número entero, bien sea negativo, positivo o cero, pertenece a una y solamente una clase residual módulo n. Por ejemplo, $-8 \in [6]$, puesto que 7 divide a $6-(-8)$ y, por tanto, $6=7\times2-8$.

Usualmente, se escogen $a \in [a]$ y $b \in [b]$ como representantes de las clases respectivas. Por tal razón, podemos definir dos operaciones fundamentales entre clases residuales módulo *n.*

Definición 1.16. *Adición de clases residuales módulo n Para sumar dos clases residuales módulo n, se eligen los representantes de cada clase y se realiza la suma correspondiente en $\mathbb{Z}$. Luego, se toma la clase de equivalencia correspondiente* $[a+b]$ *(considerando + como la suma usual definida en $\mathbb{Z}$).*

En ese sentido, podemos construir una tabla de operación para la suma de clases residuales módulo 5 (tabla 1.3).

Tabla 1.3. Tabla de operación para la suma de clases residuales módulo 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Observemos que $[2] + [4] = [2 + 4] = [6]$. Sin embargo, $6 \equiv 1 \pmod 5$ y, por tanto, $[2] + [4] = [2 + 4] = [6] = [1]$, como se puede verificar en la tabla.

Nótese que la suma de clases residuales módulo 12 conserva la misma aritmética que se utiliza para un reloj de manecillas de 12 horas. Por ejemplo, $[8] + [6] = [8 + 6] = [14]$. Dado que $14 \equiv 2 \pmod{12}$, tenemos que $[8] + [6] = [2]$.

Definición 1.17. *Multiplicación de clases residuales módulo n. Al igual que en la suma, para calcular el producto de dos clases residuales módulo n, se eligen los representantes de cada clase y se realiza la multiplicación correspondiente en* $\mathbb{Z}$. *Luego, se toma la clase de equivalencia correspondiente* $[a \times b]$ *(considerando x como el producto usual definido sobre* $\mathbb{Z}$*).*

En la tabla tabla 1.4 se presenta la multiplicación de clases residuales módulo 5.

Tabla 1.4. Tabla de la multiplicación de clases residuales módulo 5

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Nótese que $[3] \times [4] = [3 \times 4] = [12]$, Sin embargo, $12 \equiv 2 \pmod 5$ y, por tanto,

$$[3] \times [4] = [3 \times 4] = [12]$$

Se observa que cada clase residual módulo 5 tiene un inverso para la multiplicación. Esto significa que, para cada clase residual $[\ ] \neq [0]$, existe una clase residual $[b]$ tal que. $[a] \times [b] = [1]$. En efecto,

$$[1] \times [1] = [1],$$

$$[2] \times [3] = [1],$$

$$[3] \times [2] = [1],$$

$$[4] \times [4] = [1].$$

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Congruencias lineales

Sea n un número entero fijo. Una congruencia lineal es una congruencia de la forma $ax \equiv b \pmod{n}$, con a y b números enteros y $[a] \neq [0]$.

Esto significa que $a \neq 0$ y x es un número entero indeterminado que requiere ser calculado. Por tanto, resolver la congruencia lineal $ax \equiv b \pmod{n}$, equivale a calcular el valor de x que satisfaga la congruencia dada.

Por ejemplo, se puede resolver la congruencia $2x \equiv 3 \pmod{5}$, utilizando los inversos módulo 5 descritos en la sección anterior.

Para calcular el valor de x, basta con multiplicar por el inverso de 2 en ambos lados de la congruencia:

$$2x \equiv 3 \pmod{5}.$$

Luego, al multiplicar por 3, el inverso de $2, 2 \cdot 3x \equiv 3 \cdot 3 \pmod{5}$, se obtiene que

$$6x \equiv 9 \pmod{5}.$$

Puesto que $6 \equiv 1 \pmod{5}$ y $9 \equiv 4 \pmod{5}$ y tenemos que

$$x \equiv 4 \pmod{5}.$$

Por tanto, $x \equiv 4 \pmod{5}$ es solución de la congruencia $2x \equiv 3 \pmod{5}$.

En efecto, $2 \cdot 4 \equiv 3 \pmod{5}$, puesto que $8 \equiv 3$ (mopd 5).

Sin embargo, hallar la solución de una congruencia lineal no siempre es posible. Se debe garantizar que las clases residuales tengan inverso en un módulo determinado y, desafortunadamente, esto no siempre ocurre. Por ejemplo, en las clases residuales módulo 4 ocurre lo siguiente:

$$[2]\times[0]=[0],$$

$$[2]\times[1]=[2],$$

$$[2]\times[2]=[0],$$

$$[2]\times[3]=[2].$$

Se puede verificar que la clase residual del 2 no tiene inverso. Por lo tanto, una congruencia de la forma $2x \equiv 3 \pmod{4}$ no tiene solución.

Para determinar si una congruencia lineal es soluble, basta con garantizar que el módulo es un número primo.

Como ejemplo de ello, se presenta a continuación la tabla de la multiplicación para las clases residuales módulo 11 (tabla 1.5). Nótese que cada clase residual tiene un inverso. Se han resaltado con color amarillo las casillas donde aparece 1 como resultado. Esto se debe a que 11 es un número primo y se cumplen las condiciones dadas.

Tabla 1.5. Tabla de la multiplicación para las clases residuales módulo 11

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	0	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	0	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	0	6	1	7	2	7	3	9	4	10	5
7	0	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	0	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	0	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	0	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Cálculos en *WolframAlpha*

La posibilidad de resolver congruencias cuadráticas se facilita con WolframAlpha. Se trata básicamente de calcular el inverso de una clase residual módulo n y resolver luego el producto indicado.

Por ejemplo, para resolver la congruencia lineal $45\ x \equiv 1000 \bmod (101)$, se calcula el inverso de $45 \bmod 101$. Para ello, usamos el comando *powermod* $(45, -1{,}101)$, indicando el número y el módulo en el cual se está trabajando (figura 1.18).

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

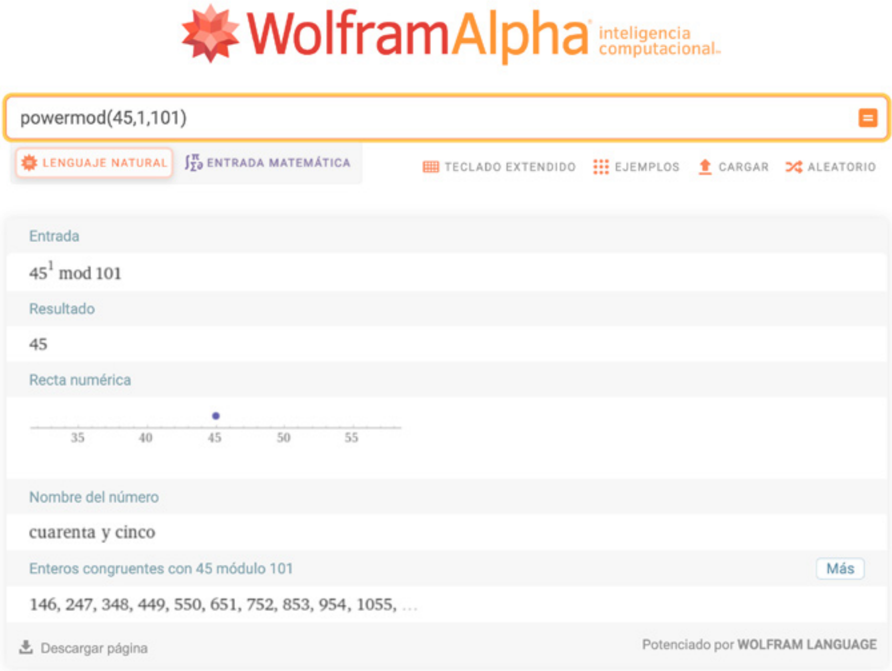


Figura 1.18. Cálculo del inverso de 45 módulo 101 en WolframAlpha.
(Wolfram|Alpha, «powermod(45,1,101)» Wolfram Alpha LLC. https://www.wolframalpha.com/input?i=powermod%2845%2C1%2C101%29&lang=es [acceso: 28 de marzo, 2023]).

En este caso particular, el inverso de 45 (mod 101) es 9. Por tanto, multiplicando en ambos lados de la congruencia por 9, tenemos que

$$45x \cdot 9 \equiv 1000*9 \pmod{101},$$

$$45 \cdot 9x \equiv 1000*9 \pmod{101},$$

$$x \equiv 9000 \pmod{101}.$$

Dado que $9000 = 101 \cdot 9 + 91$, resulta que

$$x \equiv 91 \pmod{101}.$$

La función phi de Euler

Anteriormente se definió que dos números naturales son primos relativos siempre cuyo máximo común divisor sea 1. Por ejemplo, 5 y 12 son primos relativos, pero 6 y 15 no son.

Leonhard Euler (1707-1783), gran matemático nacido en Basilea, Suiza, conocido por sus numerosos aportes en diversas ramas de la matemática, definió en particular la relación conocida como la función phi (φ) de Euler, que se presenta a continuación.

DEFINICIÓN 1.18. *Dadon $n \in \mathbb{N}$, se define $\varphi(n)$ como la cantidad de números naturales menores o iguales a n que son primos relativos con el propio n.*

Por ejemplo, $\varphi(14) = 6$, ya que hay seis números naturales menores que 14 que son primos relativos con dicho número.

Para dar significado a esta definición, considérese el conjunto S determinado por todos los números naturales a menores que 14 para los cuales MCD(a, 14) = 1.

En este caso, se tiene que

$$S = \{1, 3, 5, 5, 9, 11, 13\}$$

Puesto que siempre se debe considerar el 1, se tiene que $\varphi(1) = 1$. Por otra parte, si es un número primo, $\varphi(p) = p - 1$, ya que, al ser primo, todos los números naturales menores que él son primos relativos con p. Por ejemplo, $\varphi(11)$, dado que el conjunto S determinado por todos los números naturales a menores que 11 para los cuales es MCD(a,11) =1 es S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}.

Ahora bien. La función phi de Euler es multiplicativa.

Esto significa que $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$.

Considérese el siguiente ejemplo:

Si $n = 21$, tenemos que S = {1,2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20}.

Por tanto, $\varphi(21) = 12$.

Puesto que al descomponer en factores primos a 21 se obtiene que $21 = 3 \cdot 7$, resulta que $\varphi(21) = \varphi(3) \cdot \varphi(7) = 2 \cdot 6 = 12$.

Criptografía y clave pública RSA

En 1978, Ronald L. Rivest, Adi Shamir y Leonard Adelman, en el Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT, por sus siglas en inglés), mediante la implementación práctica de una idea de Hellman, desarrollaron el sistema criptográfico conocido como RSA (por las siglas de los apellidos de sus autores). Se trata de un sistema de clave pública con un sistema de encriptación exponencial.

El sistema RSA crea sus claves de la siguiente forma:

- Se buscan dos números primos lo suficientemente grandes: p *y* q (de entre 100 y 300 dígitos).

- Se obtienen los números y $n = p \cdot q$ y $\varphi(n) = \varphi(p) \cdot \varphi(q) = (p - 1)(q - 1)$.
- Se busca un número e tal que no tenga múltiplos comunes con $\varphi(n)$.
- Se calcula $d \cdot e \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$.
- Se dice que d es la clave pública y d es la clave privada. También se hace público el número e, necesario en el proceso empleado en el algoritmo.

La clave pública RSA funciona como se describe a continuación.

En primer lugar, para encriptar un mensaje, se asigna un número a cada una de las letras del abecedario, tal como se muestra en la tabla 1.6.

Tabla 1.6. Ejemplo de clave pública RSA

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

Enseguida, se encripta un mensaje.

Por ejemplo, el mensaje «La matemática es la reina de las ciencias», usando la clave pública RSA, queda transcrito del siguiente modo:

7665 77658469776584736765 6983 7665 8269737865 6869 766586 67 73697867736583.

Luego, se eligen dos números primos. De tal manera que $n = p \cdot q$.

Lo ideal es seleccionar primos lo suficientemente grandes, para que el mensaje quede más seguro. Para ejemplificar la situación, se toman los números primos y (el estudiante debe comprobar que, en efecto, ambos números son primos).

Luego, se calcula la función $\varphi(n)$. Puesto que $n = p \cdot q$, tenemos que

$$\varphi(n) = \varphi(p) \cdot \varphi(q) = 222 \cdot 336 = 74592.$$

A continuación, se selecciona un número e tal que $\mathrm{MCD}(e, \varphi(n)) = 1$. Para este caso en particular, se escoge (comprobar que el MCD de ambos números es 1, utilizando WolframAlpha).

Luego, se calcula $e \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$:

$$d \cdot 51347 \equiv 1 \pmod{74592}.$$

En tal caso, se tiene que $d \equiv 40667 \pmod{74592}$.

Finalmente, ese encripta el mensaje utilizando la expresión $a \equiv m^e \pmod{n}$, donde m es cada uno de los números asignados a las letras del abecedario según la clave pública RSA. Se procede del siguiente modo:

Puesto que $L = 76$, se tiene que $a \equiv 76^{51347} \pmod{75151}$.

En WolframAlpha, se obtiene el resultado que se muestra en la figura 1.19.

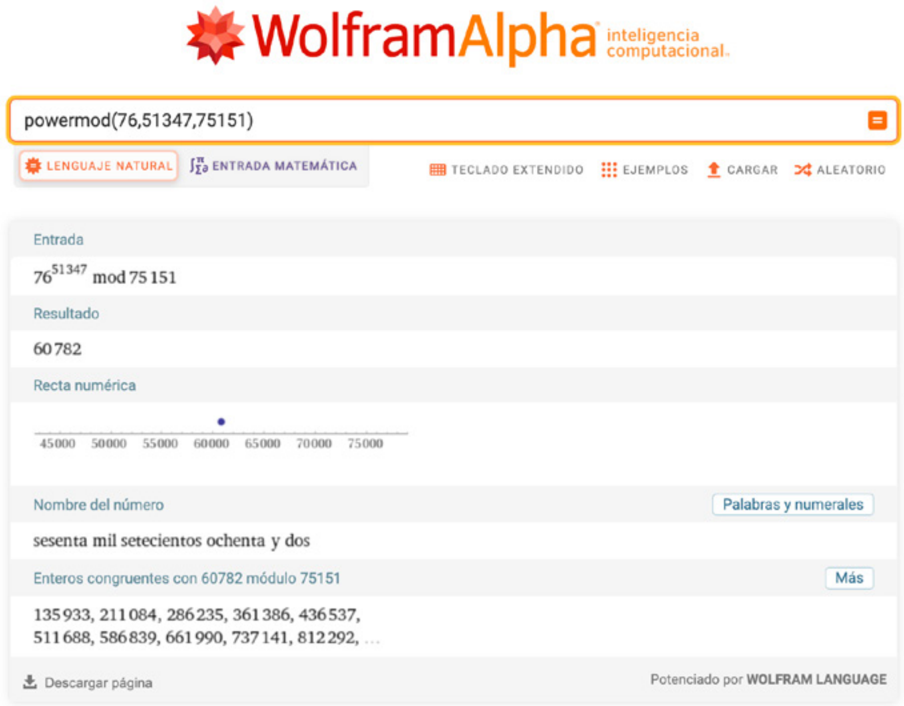


Figura 1.19. Encriptación en WolframAlpha.

(Wolfram|Alpha, «powermod(76,51347,75151)» Wolfram Alpha LLC. https://www.wolframalpha.com/input?i=powermod%2876%2C51347%2C75151%29&lang=es [acceso: 28 de marzo, 2023]).

Por tanto, el valor de L es 60782.

En consecuencia, una vez realizado el proceso completo, el mensaje encriptado será el siguiente:

60782 5218 34125 5218 22263 32193 34125 5218 22263 4956 61702 5218 32193 28077 60782 5218 59995 32193 4956 18380 5218 71834 32193 60782 5218 28077 61702 4956 32193 18380 61702 4956 5218 28077.

(El estudiante debe corroborar cada uno de los pasos).

Ahora bien. Para desencriptar un mensaje, es necesario que el receptor calcule el valor de d. Es importante resaltar que, dependiendo de la forma como se envíe el mensaje, se hará más complejo o sencillo del proceso para desencriptarlo.

Por ejemplo:

En el mensaje enviado podrían ir todos los números sin dejar espacios (6078252183 412552182226332193341255218222263...) o separados sin ningún tipo de orden (6078 252 18341255218 22 26332 1933412 5 521822263...). En este caso, se descifra la primera sílaba del mensaje enviado, para observar el proceso que se requiere. Ello se hace utilizando la expresión $b \equiv k^d \pmod{n}$

Para 60782, se calcula , como $60782^{40667} \pmod{75171}$, se muestra en la figura 1.10

Luego, $60782^{40667} \equiv 76 \pmod{75171}$.

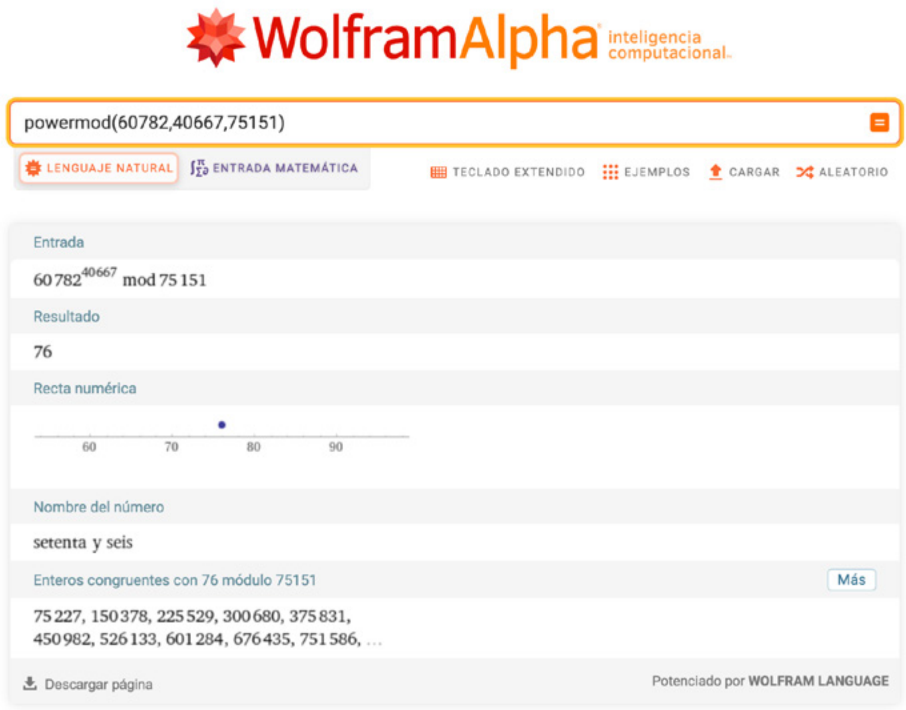


Figura 1.20. Cálculo de potencias en WolframAlpha.

(Wolfram|Alpha, «powermod(60782,40667,75151)» Wolfram Alpha LLC. https://www.wolframalpha.com/input?i=powermod%2860782%2C40667%2C75151%29&lang=es [acceso: 28 de marzo, 2023]).

Por tanto, la primera letra del mensaje descifrado es $L = 76$

En el caso de 5218, se hace $5218^{40667} \pmod{75171}$.

$5218^{40667} \pmod{75171}$. y, por tanto, la siguiente letra es la , formando así la sílaba LA.

En conclusión, para enviar un mensaje encriptado se requiere conocer el número n y e. Para desencriptarlo, es importante calcular el valor de d conocidos n y e.

Los números racionales

> Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas solo se les revelan a aquellas personas que tienen el valor de profundizar en ellas
>
> LEONARD EULER

Hay evidencia de que por lo menos desde los tiempos de los babilonios (2800 a. C.) se ha trabajado con **números racionales**, llamados también fraccionarios o quebrados. Naturalmente, una derivación de los sistemas numéricos no estaría completa sin una adecuada definición de estos números, así como de la operatoria racional [1]. Por otra parte, los racionales forman un eslabón en la cadena que lleva, a la postre, a la definición de los números reales.

En primer lugar, se hará una definición de número racional sin tener en cuenta el signo del número, para luego introducir una nueva definición de número racional positivo y número racional negativo. Hay dos razones fundamentales para llevar a cabo la construcción en esta forma. La primera es que es consecuente con el proceso histórico de desarrollo del concepto de número racional. Tal como aparecieron primero los números naturales, sin consideración alguna de signo y mucho antes que los números enteros positivos y negativos, así también aparecieron los números racionales; simplemente se utilizaron en el tratamiento de semejanza, proporción y aritmética comercial, sin sospecha de que pudiera darse el caso de racionales negativos. Estos últimos hicieron su debut con un estudio detenido de la solución de ecuaciones, independientemente de consideraciones geométricas.

La segunda razón es que plantear esta definición en dos etapas evita el problema de las equivalencias entre fracciones como, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ y $\frac{-3}{-4}$ o $\frac{5}{9}$ y $\frac{-5}{-9}$.

De forma similar a como se llevó a cabo la construcción del conjunto de los números enteros, un número racional se define como una pareja ordenada obtenida a partir de una relación de equivalencia sobre el producto cartesiano $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$.

Definición de número racional

Los números racionales constituyen el campo de cocientes de los números enteros. Es decir, un número racional no es otra cosa que un cociente entre dos números enteros. De este modo, al cociente entre 6 y 3 lo podemos escribir como $6 \div 3$ o simplemente $\frac{6}{3}$ (seis tercios). A esta última notación se le conoce como fraccionaria [14].

Los egipcios desarrollaron fracciones en su sistema de numeración. Sin embargo, únicamente las abordaron con numerador 1, esto es, fracciones de la forma $\frac{1}{n}$ con $n > 0$.

Otras civilizaciones, como la mesopotámica, desarrollaron un sistema para representar fracciones en su expresión decimal con aproximaciones realmente sorprendentes. Vale recordar que esta civilización tenía un sistema de numeración sexagesimal en la cual la base era el número 60. Otras, como la china, establecieron un algoritmo para sumar fracciones, reduciéndolas a un común denominador.

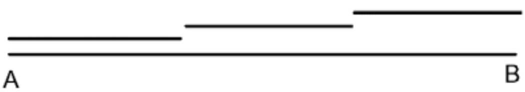
Para los pitagóricos, una escuela filosófica griega que influyó notablemente en el desarrollo de la matemática, todo era número o relación entre ellos. Teniendo en cuenta que *mensurar* significa 'medir', dos magnitudes son *conmensurables* si se puede determinar alguna magnitud común, de tal manera que las cantidades dadas se puedan expresar como múltiplos de esa magnitud.

Así, para construir su noción de **conmensurabilidad**, los pitagóricos utilizaron segmentos, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Considérese el segmento AB como unidad:

Sea el segmento CD, que se representa en relación con el segmento AB:

Nótese que el segmento CD cabe exactamente tres veces en la unidad:

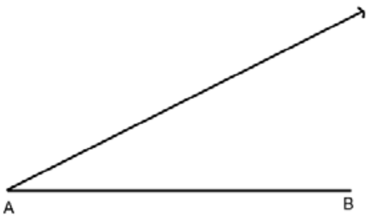


Por tanto, CD es la tercera parte del segmento AB.

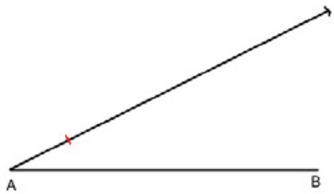
En consecuencia, CD = $\frac{1}{3}$AB, o lo que es equivalente $AB = 3CD$,

En ese sentido, Tales de Mileto, mediante el uso de regla y compás (sin medidas marcadas), construyó distintos números racionales, como se indica a continuación.

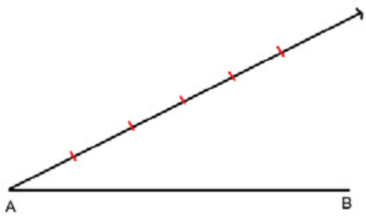
Por ejemplo, para construir, el número $\frac{2}{5}$, considerando el mismo segmento AB como unidad, estando ubicados en el punto A, se traza una semirrecta en la misma dirección de B, con un ángulo α, generalmente agudo:



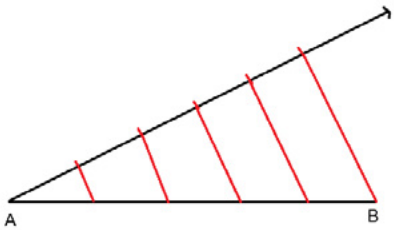
Una vez dibujada, se toma el compás con centro en A y un radio dado (no muy grande). A continuación, se ubica un pequeño arco sobre la semirrecta, en el punto en el cual la corta el compás:



Se trazan tantos arcos de circunferencia como indique el denominador sobre la semirrecta, con el mismo radio y con centro en cada una de las marcas que han sido trazadas. Como el denominador en este caso es 5, se trazan exactamente cinco arcos:



Luego, se une el último arco con el punto B mediante un segmento, para posteriormente trazar segmentos paralelos por cada uno de los arcos ubicados en la semirrecta:



Como el numerador es 2, se marca la segunda línea sobre el segmento AB. Este punto representará al número $\frac{2}{5}$.

Por tanto, es posible afirmar que $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ son magnitudes conmensurables.

Construcción de los números racionales a partir de los números enteros

En el apartado anterior, se observó como los pitagóricos utilizaron segmentos para representar, mediante fracciones, distintas partes de la unidad y se establecieron estas cantidades como conmensurables.

A continuación, se aborda la construcción formal de los números racionales con la notación que se utiliza en la actualidad. La idea es que el estudiante pueda ampliar su visión sobre los números racionales desde distintas perspectivas.

El conjunto de los números racionales se representa por medio del símbolo $\mathbb{Q}$, que corresponde a la inicial del término en italiano *quoziente*, 'cociente', que fue empleada por Peano para referirse a este conjunto numérico. De modo que

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tales que } a, b \text{ son números enteros, con } b \neq 0 \right\}$$

Nótese que el denominador no puede ser cero, puesto que cero no es divisor de ningún número entero. Si bien esta notación de $\mathbb{Q}$ es aceptada, no es tan evidente en sí misma, puesto que varios cocientes pueden representar el mismo número. Por ejemplo, 5 se puede escribir de múltiples formas como el cociente de dos números enteros: $10 \div 2$; $20 \div 4$; $-35 \div (-7)$: $105 \div 21 = 5$, entre otras.

Para evitar estas ambigüedades, se realiza la siguiente construcción, a partir de una relación apropiada, que permite observar, justamente, que varios cocientes representan al mismo número racional.

Sea el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a,b) \text{ tal que } a,\ b \in \mathbb{Z}\}$, se dispone de un plano cartesiano con dos ejes perpendiculares entre sí, como se muestra en la figura 1.21.

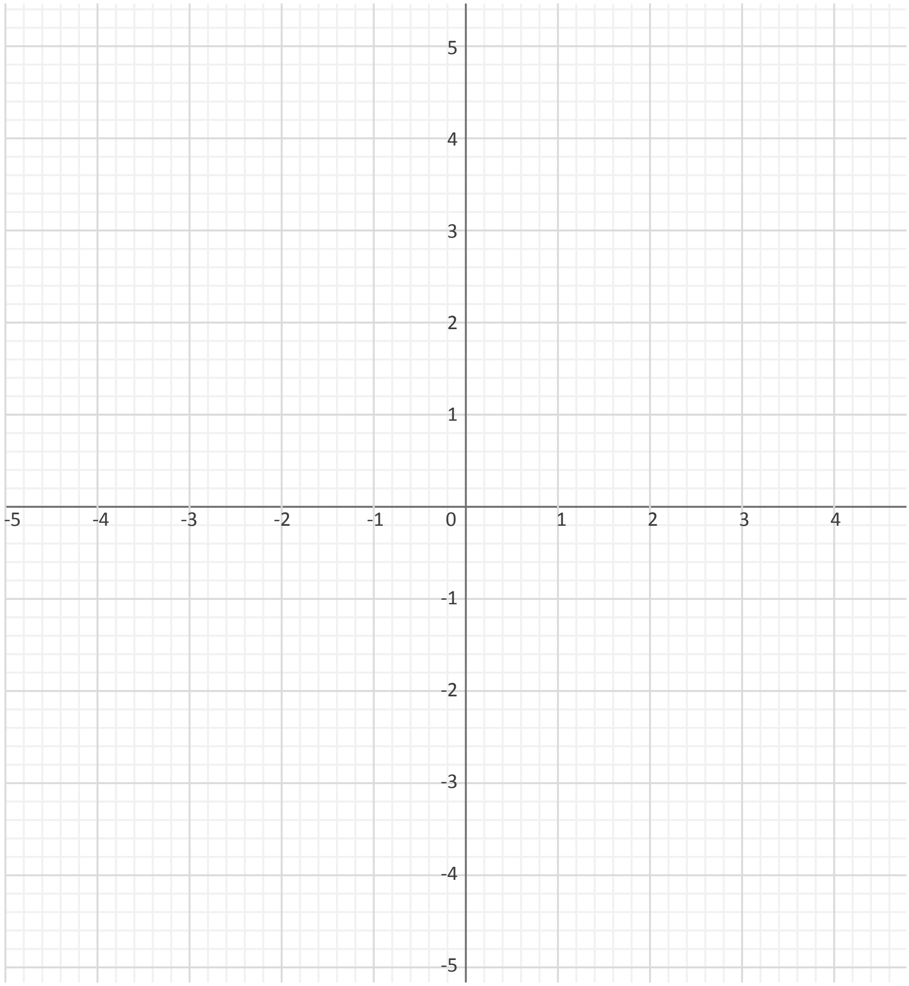


Figura 1.21. Plano cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Cada punto en el plano, en estas condiciones, representa una fracción.

Por ejemplo, la fracción $\frac{4}{5}$ se puede representar como la pareja ordenada (4,5).

Se establece la relación R sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, definida por $(a,b)\ R\ (c,d)$ si y solamente si $a \times d = b \times c$.

Obsérvese que $(2,3)\ R\ (16,24)$, porque $2{\times}24{=}3{\times}16{=}48$.

Esto significa que los números $\frac{2}{3}$ y $\frac{16}{24}$ son equivalentes, es decir, representan el mismo cociente.

Se puede probar que la relación R es de equivalencia, verificando que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva (se deja como ejercicio para el lector).

Por tal razón, al conjunto de todas las parejas que están relacionadas con una pareja (a, b), se les suele llamar **fracciones equivalentes** y se representan como $[a, b]$.

Así, por ejemplo, $[5,6]=\{(5,6),(-5,-6),(10,12),(-10,-12),(15,18),(-15,-18),\ldots,(5n,6n)\}$, donde n es un número entero (la segunda componente no puede ser cero).

Esta corresponde, justamente, a la definición de número racional:

$$[a,b] = \{(c,d)\ /\ (c,d)\ R\ (a,b)\}.$$

Como representantes de un número racional dado, suelen tomarse aquellos valores de a y b para los cuales ambos son primos relativos (es decir, no tienen divisores en común).

Por tanto, la anterior definición de número racional se puede reescribir de la siguiente manera:

$$[a,b] = \{(c,d) \mid (c,d)\ R\ (a,b), \text{ con MCD}(a,b) = 1\}.$$

Finalmente, el conjunto de los números racionales visto a partir de una construcción sobre el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, se puede redefinir como:

$$\frac{a}{b} | a,b \in \mathbb{Z}, con\, b \neq 0\, y\, MCD(a,b) = 1\}$$

Obsérvese que todo número entero a se puede representar mediante la clase $[a,1]$. Por ejemplo, la clase del 5 se puede escribir como $[5,1] = \{(5,1),(10,2),(15,3),\ldots\}$. De este modo, se puede decir que todo número entero es a su vez un número racional.

Representaciones del número racional

Se requiere considerar que si a y b son números enteros, la clase $[a,b] = \{(c,d) \mid (c,d)\ R\ (a,b), \text{ con MCD}(a,b) =1\}$. Se puede decir que $(c,d)\ R\ (a,b)$ si y solamente si $c \cdot b = d \cdot a$. Por lo tanto, la clase $[a,b]$ contiene a todas las parejas ordenadas que cumplen cierta condición, en este caso, la dada por la relación establecida.

En un lenguaje que resulte común para el lector, podemos representar la clase como el cociente de dos números enteros a y b, es decir, como $\frac{a}{b}$, lo que usualmente se conoce como representación fraccionaria o quebrada del número racional (figura1.22).

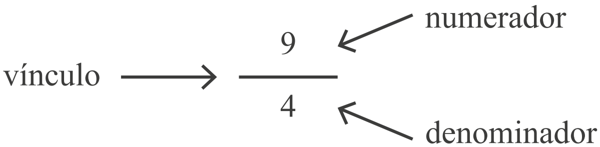


Figura 1.22. Partes de una fracción.

Esta forma de representar un número racional dado resulta bastante útil para describir distintos fenómenos asociados con el entorno que rodea al ser humano. A continuación, se describen algunas interpretaciones que, dependiendo de la naturaleza del contexto, dan sentido al número racional como fracción [15].

Como relación parte-todo

La Alcaldía de Bogotá adquirió un predio de 32 hectáreas para la construcción del patio taller que será parte de la primera línea del metro que se construirá en la ciudad. Se tiene proyectado que este lugar albergue los estacionamientos y las zonas de mantenimiento de los trenes que tendrá el metro de Bogotá. Suponiendo que el número de hectáreas destinadas para el estacionamiento de los trenes es de 17 hectáreas, podemos afirmar que la fracción $\frac{17}{32}$ representa el terreno reservado para el estacionamiento. Obsérvese que el denominador representa el total del terreno que se utilizará para la construcción del patio taller, mientras que el numerador muestra la parte del terreno destinada al estacionamiento de los trenes.

Como cociente

Se estima que el potencial petrolífero (crudo y gas natural) de Colombia es de más de 37 000 millones de barriles de petróleo equivalente, distribuidos en 18 cuencas sedimentarias que abarcan un área de 1 036 400 km^2. Respecto al total de barriles, la quinta parte se utiliza para obtener derivados como la gasolina. ¿Cuál es la cantidad de barriles de petróleo que se utilizan para tal fin?

En este caso, si bien la fracción $\frac{37000}{5}$ representa una solución a la pregunta, interesa el cociente entre el numerador y el denominador de la fracción obtenida. Por tal motivo, podemos escribir $\frac{37000}{5} = 7400$ millones de barriles de petróleo.

La fracción como cociente adquiere especial importancia cuando el cociente entre el numerador y el denominador deja un residuo distinto de cero. Es claro que, si el numerador es menor que el denominador, el cociente siempre es cero y el residuo ha de ser el mismo numerador. En tal caso, la división no resulta práctica en ciertos contextos y requiere de cierto tratamiento en busca de regularidad, con el propósito de aclarar si es o no posible obtener un residuo cero.

Como operador

El objetivo de un proceso industrial es utilizar y manejar materia prima obtenida de distintos recursos naturales y emplearla para fabricar un producto en masa. Una empresa estima que las tres cuartas partes de la materia prima que utiliza para fabricar sus productos es importada. Si la cantidad de materia que se estima que se utilizó para la fabricación de su producto el pasado mes de marzo fue de 765 toneladas, ¿cuál fue la cantidad de materia prima que se importó?

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Puesto que las tres cuartas partes, es decir $\frac{3}{4}$, de la materia prima que utiliza la empresa para su producción es importada, se calcula $\frac{3}{4} \times 765$.

La importancia de la fracción como operador radica se evidencia en el producto números racionales, que se estudia en el siguiente apartado.

Operaciones en el conjunto de los números racionales

En el conjunto de los números racionales se definen dos operaciones fundamentales: la adición ($\dotplus$) y la multiplicación ($\circledast$).

Definición 1.19. *Adición de números racionales*

Sean $[a,b]$ *y* $[c,d]$ *dos clases de números racionales, entonces* $[a,b] \dotplus [c,d] = [a \otimes d \oplus b \otimes c, b \oplus d]$*, donde* $\dotplus$ *representa la suma de números racionales;* $\oplus$*, la adición de números enteros y* $\otimes$*, multiplicación de números enteros.*

En efecto, por ejemplo

$$[3,4] \dotplus [7,9] = [3 \otimes 9 \oplus 4 \otimes 7, 4 \otimes 9].$$

Esto significa que

$$\frac{3}{4} \dotplus \frac{7}{9} = \frac{3 \otimes 9 \oplus 4 \otimes 7}{4 \otimes 9}.$$

Es necesario resaltar que este algoritmo es producto de la necesidad de tener iguales denominadores en ambos números racionales.

La suma de $\frac{5}{6} \dotplus \frac{3}{8}$ está condicionada a obtener iguales denominadores. Nótese que el producto de ambos denominadores es 48. En ese sentido, es preciso tener en cuenta que los números racionales $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{8}$ representan a dos conjuntos distintos de números equivalentes. Por tanto, se deben elegir adecuadamente otros dos representantes, de modo tal que se haga evidente la presencia de ambos denominadores 48 en los dos números. Esto es,

$$\frac{5}{6} \dotplus \frac{3}{8} = \frac{5 \otimes 8}{6 \otimes 8} \dotplus \frac{3 \otimes 6}{8 \otimes 6} = \frac{40}{48} \dotplus \frac{18}{48} = \frac{40 \oplus 18}{48} = \frac{58}{48}$$

Naturalmente, en el segundo paso se hace evidente que $\frac{40}{48} = \frac{5}{6} = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$.

Puesto que $\frac{5}{6} \dotplus \frac{3}{8} = \frac{5 \otimes 8}{6 \otimes 8} = \frac{40 \otimes 18}{48} = \frac{58}{48}$, producto de las observaciones precisadas anteriormente, se nota que, para obtener números equivalentes, basta con amplificar cada número tantas veces como indique el denominador del otro número. De manera natural, se puede apreciar entonces que $\frac{5}{6} \dotplus \frac{3}{8} = \frac{5 \otimes 8 \oplus 3 \otimes 6}{48} = \frac{58}{48}$..

Si bien la adición es una operación binaria, es decir, para sumar se necesitan dos números racionales, es posible operar con tres o más números haciendo uso extensivo del algoritmo anterior.

Ejemplo

$$\frac{3}{4} \dotplus \frac{1}{6} \dotplus \frac{9}{10}.$$

Al multiplicar los tres denominadores, se tenemos que $4 \otimes 6 \otimes 10 = 240$.

Luego, se debe amplificar cada número hasta obtener el denominador 240 en cada uno:

$$\frac{3 \otimes 60}{4 \otimes 60} \dotplus \frac{1 \otimes 40}{6 \otimes 40} \dotplus \frac{9 \otimes 24}{10 \otimes 24} = \frac{180}{240} \dotplus \frac{40}{240} \dotplus \frac{216}{240} = \frac{180 \oplus 40 \oplus 216}{240} = \frac{436}{240}.$$

En la expresión $\frac{3 \otimes 60}{4 \otimes 60}$, correspondiente a la amplificación del número $\frac{3}{4}$, se puede observar que 60 es el producto de 6 y 10, los denominadores de los otros dos números. Algo similar ocurre con los otros dos términos de la adición: 40 es el producto de 4 y 10, mientras que 24 es el producto de 4 y 6. De este modo,

$$\frac{3}{4} \dotplus \frac{1}{6} \dotplus \frac{9}{10} = \frac{3 \otimes 6 \otimes 10 \oplus 1 \otimes 4 \otimes 10 \oplus 9 \otimes 4 \otimes 6}{240} = \frac{436}{240}.$$

Aplicación

Para efectos de la aplicación de la adición y la multiplicación entre números naturales, se emplearán los signos de suma y multiplicación convencionales ($+$ y $\times$) que se usan habitualmente, considerando que el lector reconoce que las operaciones han transitado por diversos sistemas de construcción. Lo interesante está en comprender que estos símbolos no representan las mismas operaciones para todos los conjuntos definidos, puesto que en cada uno se define una operación de forma distinta.

En la tabla 1.7, se presentan los distintos tipos de productos vítreos que se elaboran en una industria. También se muestran sus aplicaciones o usos y la cantidad que se produce para venderlos en el mercado en relación con la totalidad.

Tabla 1.7. Distintos tipos de productos vítreos que se elaboran en una industria

Tipo de producto vítreo	Aplicaciones o uso	Cantidad
Vidrios masivos	Construcción doméstica, industrial	$\frac{2}{5}$
Vidrios porosos	Construcción	$\frac{1}{4}$
Vidriados	Azulejos y pavimentos cerámicos	Sin fracción

¿Qué número racional representa la cantidad de vidriados que se producen?

Los vidrios masivos y los vidrios porosos representan $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4 + 1 \times 5}{20} = \frac{13}{20}$ del total de la producción. Si bien el total está representado a través de la unidad, con fines prácticos utilizaremos el número $\frac{20}{20}$ para simbolizarla (puesto que la suma anterior tiene denominador 20). Por tanto, el excedente para conseguir el $\frac{20}{20}$ a partir de los $\frac{13}{20}$

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

está dado por $\frac{7}{20}$. De esta manera, los vidriados representan $\frac{7}{20}$ del total de la producción. Esto significa que de cada 20 vidrios que se producen, 7 son de tipo vidriado.

La **resta de números racionales**, representada por el signo $\dot{-}$, se puede apreciar como una adición, de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} \dot{-} \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \dot{+} \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a \otimes d \oplus b \otimes (-c)}{b \otimes d}.$$

Ejemplos

$$\frac{2}{9} \dot{-} \frac{5}{6} = \frac{2}{9} - \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{2 \otimes 6 \otimes 9 \otimes (-5)}{9 \otimes 6} = \frac{12 \oplus (-45)}{54} = -\frac{33}{54}$$

$$-\frac{3}{5} \dot{-} \frac{1}{8} = -\frac{3}{5} \dot{+} \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{-3 \otimes 8 \otimes 5 \otimes (-1)}{5 \otimes 8} = \frac{-24 \otimes (-5)}{40} = -\frac{29}{40}$$

$$\frac{7}{10} \dot{-} \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{7}{10} \dot{+} \left(\frac{4}{9}\right) = \frac{7 \otimes 9 \oplus 10 \otimes 4}{10 \otimes 9} = \frac{63 \oplus 40}{90} = \frac{104}{40}$$

Definición 1.20. *Multiplicación de números racionales*

Sean $[a, b]$ *y* $[c, d]$ *dos clases de números racionales, entonces*

$$[a, b] \circledast [c, d] = [a \otimes c, b \otimes d],$$

donde $\circledast$ *representa la multiplicación de números racionales y* $\otimes$ *la multiplicación de números enteros. Esto significa que*

$$\frac{a}{b} \circledast \frac{c}{d} = \frac{a \otimes d}{b \otimes d}.$$

La multiplicación de números racionales se interpreta como el cálculo de una parte de otra.

Ejemplos

El producto $\frac{1}{2} \circledast \frac{2}{5}$ representa «la mitad de dos quintos».

La fracción $\frac{3}{8} \circledast \left(-\frac{5}{9}\right)$ indica «las tres octavas partes de menos cinco novenos».

Aplicación

1) La distancia media de la Tierra a Marte es de 225 000 000 km. ¿A qué distancia del planeta rojo se encuentra una nave espacial que ha recorrido $\frac{5}{12}$ del total del trayecto, si partió desde la Tierra?

Al haber recorrido $\frac{5}{12}$ del total del trayecto, la nave se ha desplazado $\frac{5}{12} \times 225000000\text{ km} = \frac{1125000000}{12}\text{km}$. Esta expresión se puede simplificar como 93750000 km.

Por tanto, la nave se encuentra a 225000000 km − 93750000 km = 131250000 km de Marte.

2) Un procesador Intel Core i5-1135G7 alcanza una frecuencia turbo máxima de 4 GHz, mientras que un procesador Intel Core i5-L16G7 alcanza una frecuencia turbo máxima de 3 GHz. ¿Cuántas veces es mayor la frecuencia turbo del procesador 1135G7 respecto al procesador L16G7?

La relación de las frecuencias de turbo máximas está dada por el número racional $\frac{3}{4}$. Desde luego, $\frac{3}{4} \times 4\text{GHz} = \frac{12}{4}\text{GHz} = 3\text{GHz}$. De esta manera, se puede esclarecer que un procesador L16G7 alcanza las tres cuartas partes de la frecuencia turbo de un procesador 1135G7.

Inversos

Los números racionales tienen elemento neutro tanto para la adición como para la multiplicación. De este modo, 0 y 1 representan respectivamente ambos elementos.

Inverso para la adición. En el conjunto de los números racionales, existe el número $-\frac{a}{b}$ tal que, para todo número racional $\frac{a}{b}$, se cumple que $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$

Inverso para la multiplicación. En el conjunto de los números racionales, existe el número $\frac{b}{a}$ tal que, para todo número racional $\frac{a}{b}$, se cumple que $\frac{a}{b} \circledast \frac{b}{a} = 1$.

En la tabla 1.8, podemos apreciar algunos inversos para la adición y la multiplicación de números racionales.

Tabla 1.8. Inversos para la adición y la multiplicación de números racionales

Número racional	Inverso para la adición	Inverso para la multiplicación
$\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{7}{2}$
$-\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{12}{5}$
9	−9	$\frac{1}{9}$
−10	10	$-\frac{1}{10}$
0	0	No tiene

La **división de números racionales**, representada por el signo $\oslash$ es una forma de multiplicación, utilizando el inverso multiplicativo para el divisor, de modo que

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{d}{c}} = \frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d}$$

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Ejemplo

$$\frac{4}{11} \oslash \frac{8}{3} = \frac{4}{11} \otimes \frac{8}{3} = \frac{32}{33}$$

Expresión decimal de un número racional

Considérese la fracción $\frac{3}{4}$. Como se puede observar, el numerador es menor que el denominador y, en consecuencia, el cociente ha de ser cero y el residuo el mismo numerador:

$$\begin{array}{r|l} 3 & \underline{4\quad\quad} \\ 3 & 0 \end{array}$$

Sin embargo, es posible realizar un proceso que permita superar esta ambigüedad, en busca de un residuo cero. Para obviar el círculo vicioso, se multiplica el residuo por 10 y de manera natural, se agrega una coma a la derecha del cociente:

$$\begin{array}{r|l} 3 & \underline{4\quad\quad} \\ 30 & 0, \end{array}$$

Luego, se calcula el cociente entre 30 y 4, el cual se ubica a la derecha de la coma escrita en el paso anterior:

$$\begin{array}{r|l} 3 & \underline{4\quad\quad} \\ 30 & 0{,}7 \\ 2 & \end{array}$$

Nuevamente, se multiplica por 10 el residuo resultante, y se calcula el cociente correspondiente. Este proceso termina, o bien cuando se obtiene un residuo cero en alguna parte del proceso, o bien cuando se repite alguno de los residuos previamente obtenidos:

$$\begin{array}{r|l} 3 & \underline{4\quad\quad} \\ 30 & 0{,}75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

En este caso, se obtiene finalmente un residuo cero.

El cociente de la división es la representación decimal del número racional, que recibe el nombre de **expresión decimal finita**. En el caso presentado, 0,75 es la expresión decimal finita del número racional $\frac{3}{4}$, y se lee como «75 centésimas».

No siempre se obtiene una expresión decimal finita al calcular el cociente entre el numerador y el denominador de un número racional.

Por ejemplo, al calcular el cociente de la fracción $\frac{2}{7}$, se tiene que

$$\begin{array}{l|l} 2 & 7 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}285714 \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 30 & \\ 2 & \end{array}$$

En lugar de obtener un residuo cero, se obtiene uno de los residuos que previamente se habían calculado: 2. Por tal razón, el residuo nunca será cero, y las cifras correspondientes al cociente volverán a repetirse una y otra vez. Dicho cociente se denomina **expresión decimal infinita periódica**.

El cociente de la división será, en este caso, el número 0,285714285714285714...

Cuando esto sucede, se suele colocar una línea horizontal sobre las cifras que se repetirán, para indicar que el proceso nunca terminará, de la siguiente manera:

$$\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$$

PROPOSICIÓN 1.5. *Todo número racional $\frac{a}{b}$ se puede escribir, o bien como un número cuya expresión decimal es finita, o como un número con expresión decimal infinita periódica.*

En ese sentido, toda expresión decimal finita o infinita periódica puede representarse mediante una fracción.

Por ejemplo, la expresión decimal 0,452 se puede expresarse como el cociente de dos números enteros. A continuación, se presenta un método que permitirá hallar la fracción correspondiente.

Se observa inicialmente que esta expresión tiene tres cifras decimales: 4, 5 y 2. Por tal razón, se lee «452 milésimas». Por tanto, es suficiente con escribir una fracción cuyo numerador sea 452 y el denominador sea 1000:

$$0,452 = \frac{452}{1000}.$$

La posición de las cifras decimales de la expresión dada determina su representación como fracción.

Si se tiene, por ejemplo, la expresión decimal 3,45347 esta se descompone del siguiente modo:

Unidades	Coma decimal	Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas	Cienmilésimas
3	,	4	5	3	4	7

La última cifra decimal corresponde a las cienmilésimas, como se puede apreciar. En ese sentido, una cienmilésima es equivalente a cien milésimas y, por tanto, 3,45347 se puede escribir como

$$\frac{345347}{100000}$$

Si la expresión decimal es infinita periódica, para escribirla como una fracción, no se razona de la misma forma. Al considerar infinitas cifras decimales después de la coma, resulta poco relevante su valor posicional y se requiere de otro tipo de estrategia para representarla como un cociente, tal como se indica en el siguiente ejemplo.

Sea el número racional $0{,}1\overline{23}$. Se aprecia que tiene una expresión infinita periódica, puesto que 23 se repite de forma indefinida, luego

$$0{,}1\overline{23} = 0{,}0{,}12323232323\ldots$$

En adelante, se utilizará x para escribir una expresión decimal infinita periódica. De este modo,

$$x = 0{,}1\overline{23}$$

Nótese que este número tiene una cifra decimal no incluida en su periodo: el 1. La posición de esta cifra corresponde a las décimas y, por tanto, es importante escribir el número de tal modo que se aprecie únicamente su periodo después de la coma. Si se multiplica por 10 la expresión decimal dada, la coma se desplazará una posición más hacia la derecha. Por consiguiente,

$$10\text{x} = 0{,}1\overline{23}$$

Cabe anotar que, si después de la coma decimal aparece cierto número de cifras no periódicas, ha de multiplicarse por la potencia de 10 necesaria, hasta concebir únicamente el periodo posterior a la coma.

Por ejemplo, si $x = 34{,}564\overline{3}$, nótese que hay exactamente tres cifras que no están incluidas en el periodo (564). Por tanto, se debe multiplicar por 1000 para escribir la expresión decimal como $1000\text{x}=34564{,}\overline{3}$ y, de este modo, evidenciar un periodo después de la coma.

Continuando con el ejemplo previo, se tiene que la expresión decimal $x = 0{,}1\overline{23}$ es equivalente a $10x = 1{,}\overline{23}$. Esto se hace con un propósito general: eliminar su periodo para luego considerar un número entero.

Si $10x = 1{,}\overline{23}$, es natural pensar que al multiplicar $10x$ por 100, la coma decimal se desplazará dos cifras decimales hacia la derecha, precisamente, el número de cifras correspondientes a su periodo. Por tanto, $10x \cdot 100 = 1{,}\overline{23} \cdot 100 = 123{,}\overline{23}$ y, en consecuencia, $1000x = 123{,}\overline{23}$.

En este momento, se tienen tres representaciones para la misma expresión decimal:

1. $x = 0{,}1\overline{23}$,
2. $10x = 1{,}\overline{23}$,
3. $1000x = 123{,}\overline{23}$.

Obsérvese que las expresiones 2 y 3 tienen algo similar: en ambas es evidente un periodo después de la coma.

Por tanto, si a la expresión 3 se le resta la 2:

$$\begin{array}{rr} & 1000x = 123{,}\overline{23} \\ - & 10x = 1{,}\overline{23} \\ \hline & 990x = 122 \end{array}$$

y luego el resultado se multiplica por el inverso de 990 en ambos lados de la igualdad:

$$990x \cdot \frac{1}{990} = 122 \cdot \frac{1}{990}$$

se obtiene como resultado que

$$x = \frac{122}{990}$$

Esta última expresión corresponde, precisamente, al número racional $\frac{122}{990}$ en su representación fraccionaria.

Ejemplo El esquema del proceso que debe seguirse para escribir una expresión decimal como fracción se resume en la tabla 1.9, utilizando como ejemplo la expresión decimal $-12{,}67\overline{8}$.

Tabla 1.9. Cálculo de la representación fraccionaria de la expresión decimal de un número racional

Paso	Afirmación	Razón
1	$x = -12{,}67\overline{8}$.	Se asigna x a la expresión decimal dada.
2	$x \cdot 100 = -12{,}67\overline{8} \cdot 100$	Se multiplica por 100 en ambos lados de la igualdad, puesto que hay exactamente dos cifras decimales no incluidas en el periodo del número dado.
3	$100x = -1267{,}\overline{8}$	Se ajusta la representación de la expresión decimal, de modo tal que en la parte decimal solo sea visible el periodo.
4	$x \cdot 100 = -1267{,}\overline{8} \cdot 10$	Se multiplica por 10, puesto que el periodo de la expresión decimal consta de una única cifra decimal periódica.
5	$1000x = -12678{,}\overline{8}$	Se obtienen los productos correspondientes.

Paso	Afirmación	Razón
6	$1000x = -12678{,}\overline{8}$ $-\ 100x = -1267{,}\overline{8}$ $900x = -11411$	Se resta la expresión obtenida en el paso 3 de la obtenida en el paso 5 (se consideran aquellas expresiones donde es visible únicamente el periodo después de la coma decimal).
7	$900x \cdot \dfrac{1}{900} = -11411 \cdot \dfrac{1}{900}$ $x = -\dfrac{11411}{900}$	Se multiplica por el inverso de 900 en ambos lados de la igualdad, con lo cual se obtiene como resultado la representación fraccionaria del número racional dado.

Representación de un número racional mediante exponentes enteros

Si bien la expresión decimal finita o infinita periódica es la que comúnmente se utiliza para representar números racionales, otra forma de hacerlo es mediante exponentes enteros. A continuación, se describe esta forma de representar números racionales, que también puede ser bastante útil.

Definición 1.21. *Sea $\frac{a}{b}$ un número racional, la n-ésima potencia de $\frac{a}{b}$, escrita $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, es el producto de multiplicar n veces $\frac{a}{b}$ por sí mismo.*

Ejemplos

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4\cdot 4\cdot 4}{5\cdot 5\cdot 5} = \frac{64}{125},$$

$$\left(-\frac{2}{7}\right)^4 = \left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7} = \frac{16}{2401}.$$

Hasta ahora, se han presentado algunos ejemplos utilizando exponentes enteros positivos. Sin embargo, es posible cuestionarse respecto al uso de exponentes enteros negativos: ¿Qué significado se le atribuye a un número racional cuyo exponente es un número entero negativo?

Definición 1.22. *Sean $\frac{a}{b}$ un número racional y un número entero positivo, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ siempre que $a \neq 0$.*

De acuerdo con la definición 1.22, si el exponente de un número racional dado es negativo, basta con escribir su inverso con el exponente positivo.

Ejemplos

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9},$$

$$\left(-\frac{6}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{6}\right)^3 = \left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{125}{216},$$

$$(-7)^{-4} = \left(-\frac{1}{7}\right)^4 = \left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2401},$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-5} = (5)^5 = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 3125$$

Teoría de la proporción

> Lo que es afirmado sin prueba puede ser negado sin prueba.
>
> EUCLIDES

Una aproximación histórica a los conceptos de razón y proporción muestra que diversos documentos han descrito ambos conceptos en distintas épocas. En ellos, se pueden identificarse seis momentos en la historia, que, por su relevancia, se describen a continuación en orden secuencial [16]:

4. La época de la escuela pitagórica, en la cual existía una teoría de las proporciones que, según la tradición hegemónica, entra en crisis por el «descubrimiento» de la inconmensurabilidad (descrito en la sesión anterior).
5. La época dorada de los griegos (fundamentalmente de Eudoxo, Euclides y Apolonio) en la que se «crea» una teoría de las proporciones, en la que se adapta a la versión hipotético-deductiva y se usa en la descripción de las secciones cónicas.
6. La época del surgimiento de lo que hoy se llama álgebra —y particularmente de la geometría analítica— en la que se hace uso de la teoría de las proporciones en la solución de problemas geométricos, a través de procedimientos analíticos.
7. La época del Renacimiento, en la que la clásica teoría de proporciones griega se transforma y reformula para ampliar su ámbito de aplicación a magnitudes no geométricas y su empleo en las ciencias naturales y médicas.
8. La época de creación del Cálculo y del Análisis, en la que el lenguaje de las funciones sustituye el clásico lenguaje de las proporciones empleado por varios siglos, cayendo este último en un estado de aletargamiento.
9. La época de desarrollo de los trabajos del matemático alemán Julius W. R. Dedekind y del matemático y filósofo alemán Gottlob Frege, relativos a la construcción del conjunto de los números reales, en la que, de manera un poco intempestiva, la teoría euclidiana parece renacer en cuanto a su protagonismo, como componente esencial en dichas construcciones. [16, p. 114].

En la actualidad, se han realizado estudios acerca de la historia de la matemática que relacionan la teoría la proporción presentada por Euclides en el libro V de *Elementos* y la definición de los números reales enunciada por Dedekind [17]. Varios de estos estudios presentan esta analogía como una cierta identidad de la razón de dos magnitudes con un número, según la cual, la razón de una magnitud A a otra magnitud B de la misma clase, denotada por la expresión $A : B$, es un número que podría ser racional o no serlo (como se abordará más adelante en el capítulo II) determinado de la manera como se explica a continuación.

Esto significa que la definición de número real propuesta por Richard Dedekind es análoga a la presentada por Eudoxio en su teoría de la proporcionalidad. [18].Otros estudios presentan esta analogía como una correspondencia, interpretación o equivalencia: existe una correspondencia entre la definición euclidiana de identidad de razones y la teoría moderna, debida a Dedekind, de los números irracionales. Con ello, la definición de número real es atribuida a Dedekind como una interpretación de la definición de proporción de Eudoxio, tal como la enuncia Euclides al principio de su libro V [19].

Como es bien sabido y como se profundizará en el capítulo 2, las definiciones euclidianas son un equivalente de la técnica de Dedekind (a través de «cortes» en los racionales) para investigar la propiedad de los números reales. Después de más de dos milenios, la teoría de las proporciones de Eudoxio llegaría a ser la base de la teoría de los números reales de Dedekind (que data de los años 1870). Aproximadamente, la teoría de las proporciones de Eudoxio corresponde a la teoría de los números reales (positivos) bajo multiplicación.

En el siguiente apartado, se recapitula la relación entre la teoría euclidiana de la proporción y la construcción de los números reales. Inicialmente, se presentan algunos aspectos relevantes del libro V de los *Elementos* de Euclides, enfatizando en la idea de que en la teoría allí expuesta no es pertinente caracterizar las razones como números, ni la proporción como igualdad entre razones ni como operaciones entre razones. Luego, se expone una mirada a la discusión en torno al uso que, al parecer, Dedekind hizo de la teoría euclidiana de la proporción.

Aspectos de la teoría de la proporción de Euclides en el libro V de los *Elementos*

Si bien varios de los trece libros que componen los *Elementos*, la magistral obra de Euclides, abordan cuestiones sobre las razones de magnitudes geométricas o números y sobre las proporciones, se centra la atención en el libro V, debido a que en este se exhibe la reelaboración euclidiana de la teoría de la proporción eudoxiana [20] que plantea un tratamiento general para las magnitudes geométricas y ha sido ampliamente estudiada por historiadores y filósofos. Además, es esta teoría (y no precisamente la de la proporción numérica tratada en los libros VII, VIII y IX) la que se puede vincular con los trabajos sobre los números reales de Dedekind y Frege.

Al explorar el libro V [21], se identifican dieciocho definiciones, veinticinco proposiciones y dos corolarios.

En su orden, las dieciocho definiciones procuran caracterizar y nominar las ideas de 1) parte, 2) múltiplo, 3) razón, 4) guardar razón, 5) guardar la misma razón, 6) magnitudes proporcionales, 7) razón mayor, 8) menor proporción, 9) razón duplicada, 10) razón triplicada, 11) magnitudes correspondientes, 12) razón por alternancia, 13) razón por inversión, 14) composición de una razón, 15) separación de una razón, 16) conversión de una razón, 17) razón por igualdad y 18) proporción perturbada. El contenido de algunas de las definiciones contempla otras ideas no definidas en los *Elementos*, tales como: magnitud, medir (o ser medido), tamaño, magnitudes homogéneas, equimúltiplos, comparación de magnitudes, antecedente, consecuente, extremos, medios, adición de magnitudes y diferencia de magnitudes.

Ahora bien, la historia de la teoría euclidiana de la proporción ha prestado especial atención a las definiciones 3, 5 y 7 del libro V de los *Elementos*, esto es a las definiciones de razón, guardar la misma razón (proporción) y razón mayor, que se exponen a continuación (como definiciones 19, 20 y 21, respectivamente, para mantener el consecutivo empleado en este texto).

Definición 1.23. *Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes* homogéneas [21, lib. V, def. 3].

Existe un cierto consenso en que esta definición presenta un carácter general y vago respecto de la idea de razón. Este carácter no constituye una falencia en la teoría; por el contrario, muestra que, en el conjunto de la teoría euclidiana de la proporción, no es pertinente precisarla más. No obstante, es preciso aclarar las nociones de *tamaño* y *magnitudes homogéneas*, implicadas en esta definición, incluso a través de una referencia a la intuición.

Respecto del tamaño de una magnitud, se puede señalar que es una característica intrínseca del objeto geométrico, de orden cuantitativo, no numérico, y no de este en relación con otro. Así, por ejemplo, el tamaño de un segmento es la cantidad de longitud de este, pero no la medida de la cantidad de su longitud, o bien el tamaño de una región es la cantidad de superficie de esta, pero no su área.

En cuanto a la idea de homogeneidad entre las magnitudes, es necesario anotar que se refiere a que las dos magnitudes involucradas en una razón no pueden ser de diferente naturaleza. No se puede, por ejemplo, establecer una razón entre el tamaño de un segmento y el tamaño de una superficie, o entre el tamaño de un ángulo y el tamaño de un volumen, entre otros.

Desde esta perspectiva, más allá de definir la idea de razón, la definición 3 del libro V de los *Elementos*, aun sin precisar la idea de relación, condiciona parcialmente la posibilidad de su existencia y apuntala aspectos de su naturaleza; particularmente, descarta la posibilidad de entenderla como una relación entre números e incluso como un número, pero sí permite entenderla como una elación entre tamaños de magnitudes.

Definición 1.24. *Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente, y tomados en el orden correspondiente* [21, lib. V, def. 5].

La interpretación de esta definición se dificulta, en primer lugar, por la falta de apropiación del lenguaje en que está escrita, así como por la carencia de un lenguaje simbólico o gráfico que la represente, y, en segundo lugar, por la idea de equimúltiplos y por la generalidad implicada en la condición que se tiene que satisfacer para todos los equimúltiplos (o mejor, para todas las parejas de equimúltiplos) [16].

Para contrarrestar esta dificultad, se recurre al lenguaje gráfico a través de dibujos que representen las magnitudes implicadas: sean A y B segmentos, y C y D cuadrados, de los tamaños indicados en la figura 1.23.

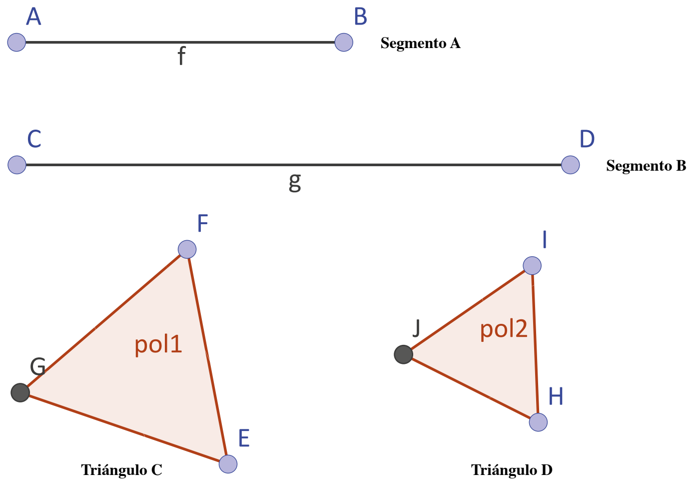


Figura 1.23. Representación geométrica de figuras equimúltiplos.

Constrúyanse los múltiplos dos de A y C, así como los múltiplos tres de B y D para luego obtener los dibujos que se muestran en la figura 1.24.

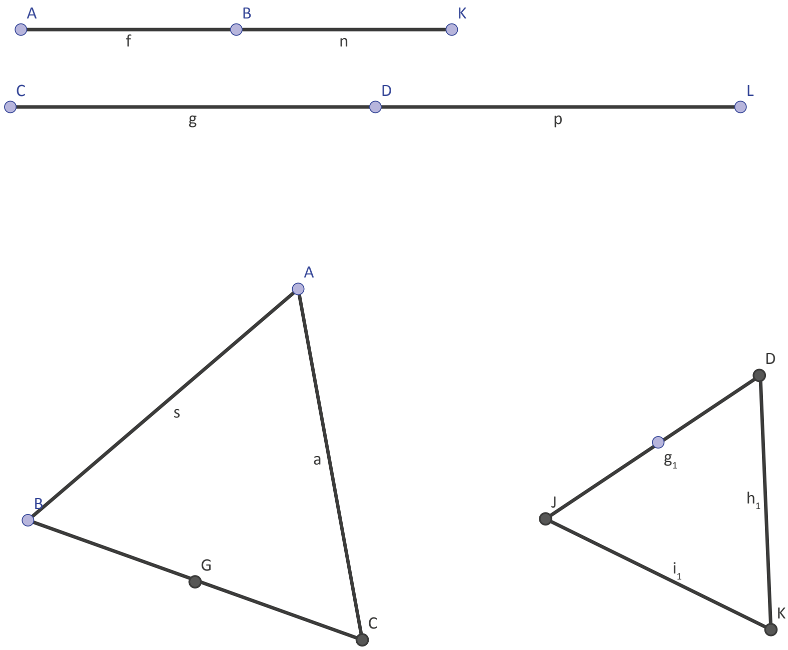


Figura 1.24. Múltiplos de un segmento y de un triángulo.

Comparando ahora los tamaños del múltiplo dos de A con el del múltiplo tres de C y a la vez el tamaño del múltiplo dos de B con el múltiplo tres de D, se establece que el múltiplo dos de A «es menor que» el múltiplo tres de C y a la vez el múltiplo dos de B «es menor que» el múltiplo tres de D, existiendo entonces la posibilidad de que A guarde con C la misma razón que B guarda con D. Si la comparación de los múltiplos de A y C arroja siempre el mismo resultado que la comparación de B y D (para los respectivos equimúltiplos), entonces se confirmará que A guarda con C la misma razón que B guarda con D.

Otra estrategia para facilitar la interpretación de la definición 5 del libroV de los *Elementos* es recurrir a la traducción simbólica de su contenido mediante expresiones lógicas y algebraicas. En ese sentido, en los textos de los historiadores se reportan varias versiones simbólicas (no euclidianas, por supuesto). Uno de ellos reseña dos de tales versiones, en las cuales a, b, c y d son unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera. En la primera versión se establece que se da una proporción $a : b :: c : d$ si y solo si $ma > nb$ y $mc > nd$, $ma = nb$ y $mc = nd$ o $ma < nb$ y $mc < nd$. En la segunda se establece que si $ma > nb$, entonces $mc > nd$; si $ma = nb$, entonces $mc = nd$, y si $ma < nb$, entonces $mc <$ nd.

Como se puede observar, esta versión se formula como disyunción de conjunciones, en tanto que la segunda es expresada como conjunción de condiciones (o conjunción de implicaciones). Cabe anotar que en las expresiones simbólicas solo se incorporan relaciones entre múltiplos, pero no la razón entre dos de tales magnitudes.

Probablemente, la interpretación que se ha logrado a través de las representaciones gráfica y simbólica, expuestas antes, contrasta con la siguiente interpretación: «La condición para que A, B, X, Y sean proporcionales es que: si los múltiplos A, 2A, 3A,... y B, 2B, 3B... son dispuestos en un arreglo en una sola secuencia en el orden de tamaño, y de la misma manera se disponen los múltiplos X, 2X, 3X,... y Y, 2Y, 3Y,..., la ley de distribución de los múltiplos de A entre aquellos de B debe ser la misma que la de los múltiplos de X entre aquellos de . De ahí que «la identidad» de las razones A ∶ B y X ∶ Y significa la identidad de estas dos leyes de distribución, y la razón A : B en sí misma significa la relación de tamaño entre A y B que es indicada por la manera en que los múltiplos de A están distribuidos entre aquellos de B».

Como se aprecia, esta interpretación se refiere a una correspondencia entre dos sucesiones ordenadas de múltiplos; cada una compuesta por los múltiplos de las dos magnitudes de una razón. Además, para una teoría general de la proporción no se requiere una definición de razón, en singular, aunque sí se exigen sendas definiciones de igualdad y desigualdad entre razones, (guardar la misma razón y razón mayor). Veamos esta última.

Definición 1.25. *Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera [magnitud] excede al múltiplo de la segunda, pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta* [21, lib. V, def. 7].

Con respecto a lo planteado por los historiadores sobre esta definición, se resalta que uno de los defectos conocidos de la teoría euclidiana en el libro V es que no prueba que no tener la misma razón sea equivalente a tener una razón mayor o menor razón.

Sin embargo, al explorar el uso que se hace de esta definición en la teoría euclidiana (por ejemplo, en las proposiciones 9 y 10 del libro V de los *Elementos*), se corrobora que Euclides sí supone tal equivalencia, con lo cual dispone de una herramienta potente para la demostración de la proporción o desproporción de cuatro magnitudes. En otras palabras, si se supone que tener una razón mayor que otra equivale a afirmar que no es cierto que exista proporción entre tales magnitudes, se dispone de una herramienta para demostrar por reducción al absurdo.

En el marco de las interpretaciones y observaciones presentadas antes para las definiciones consideradas, hemos querido dejar claro que, desde nuestra perspectiva e interpretación, en la teoría euclidiana de la proporción contenida en el libro V de los *Elementos*:

1. Las razones son relaciones, pero no son números ni se establecen entre números, sino entre tamaños de magnitudes geométricas homogéneas dos a dos.
2. La proporción no es una igualdad entre razones (y, por tanto, no es igualdad entre números) ni depende de estas, sino fundamentalmente del comportamiento relativo y correspondiente de los múltiplos de las magnitudes implicadas.

Proposiciones y corolarios del libro V

Las veinticinco proposiciones y los dos corolarios se pueden clasificar en cinco grupos de propiedades: cuatro de ellos atienden a los diferentes dominios que relaciona cada proposición (magnitudes y magnitudes, magnitudes y proporciones, proporciones y magnitudes, proporciones y proporciones), en tanto que el quinto ubica una proposición que no establece relación entre tales dominios [22].

Así, en el primer grupo estarían las proposiciones que se refieren a las magnitudes y sus múltiplos, pero que no aluden a las razones ni a las proporciones. En este grupo clasificamos las proposiciones 1, 2, 3, 5 y 6, que pueden interpretarse, en su orden, mediante las siguientes expresiones simbólicas:

- $[m\ (A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n\ ) = mA_1 + mA_2 + mA_3 + \cdots + mA_n\ ]$,
- $[(m \oplus n)A = mA + nA]$,
- $[m(nA)=(mn)A]$,
- $[(m \ominus n)A = mA - nA]$,
- $[m(A-B) = mA - nB]$.

Como se ve a través de estas interpretaciones simbólicas, aunque también en la retórica enunciación euclidiana, no se incluye alusión alguna a la razón ni a la proporción, pero sí a los múltiplos de las magnitudes, a la suma o diferencia de magnitudes, o a la adición, diferencia y multiplicación de los números ligados a los múltiplos. En cierto sentido, este conjunto de proposiciones caracteriza parcialmente el dominio de magnitudes con la operación de suma.

En el segundo grupo ubicamos la proposición 7, con su corolario, y la proposición 8, que se pueden representar con las siguientes expresiones:

- Si entonces $A = B$, entonces $A : C :: B : C$.
- Si $A < B$, entonces $A : C < B : C$ y $C : A > C : B$

Una interpretación de estas expresiones permitiría reconocer que las proposiciones aluden a propiedades de orden de las razones a partir de propiedades de orden en las magnitudes. En otras palabras, estas proposiciones expresarían cómo la igualdad o desigualdad de las magnitudes se refleja o trasmite a algunas de las razones en que ellas están implicadas.

El tercer grupo está integrado por las proposiciones 9, 10, 14, 20, 21 y 25, que describen cómo las relaciones entre razones determinan relaciones u operaciones entre magnitudes. Sus expresiones simbólicas respectivamente son:

- Si $A : C :: B : C$, entonces $A = B$ y, si $C : A :: C : B$, entonces $A = B$.
- Si $A : C < B : C$, entonces $A < B$ y si $C : A < C : B$, entonces $A > B$.

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

- Si $A : B :: C : D$ y $A \geq C$, entonces $B \geq D$.
- Si $A : B :: D : E$ y sí $B : C :: E : C$ y $A \geq C$, entonces $D \geq C$.
- Si $A : B :: D : E$ y sí $B : C :: D : E$ y $A \geq C$, entonces $D \geq C$.
- Si $A : B :: C : D$ y $A > B$, $A > C$, $B > D$, $C > D$, entonces $A + D > B + C$.

Una interpretación similar a la hecha para el segundo grupo referiría que las proposiciones aluden a propiedades de orden de las magnitudes a partir de propiedades de orden de las razones.

El cuarto grupo contiene el mayor número de proposiciones (4, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19 y su corolario, 22, 23 y 24) e incluye propiedades de las proporciones o desproporciones, es decir, de las razones en sí mismas. Sus enunciados simbólicos respectivamente son:

- Si $A : B :: C : D$, entonces, para todo m y n, $mA : nB :: mC : nD$.
- Si $A : B :: C : D$, entonces $B : A :: D : C$.
- Si $A : B :: C : D$ y si $C : D :: E : F$, entonces $A : B :: E : F$.
- Si $A_1 : B_1 :: A_2 : B_2 :: A_3 : B_3 :: \cdots :: A_n : B_n$, entonces, $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n : B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n :: A_i : B_i$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
- Si $A : B :: C : D$ y $B : C > E : C$, entonces $A : B > E : F$.
- Si $A : B :: C : D$, entonces $A : C :: B : D$ (las magnitudes deben ser homogéneas).
- Si $(A+B) :: B :: (C + D) : D$, entonces $A : B :: C : D$.
- Si $A : B :: C : D$, entonces $(A+B) : B :: (C + D) : D$.
- Si $A + B : C + D :: A : C$, entonces $A + B : C + D :: B : D$.
- Si $A + B : C + D :: B : D$, entonces $A + B : C + D :: A : C$.
- Si $A_1 : A_2 :: B_1 : B_2, A_2 : A_3 :: B_2 : B_3, \ldots, A_{(n-1)} : A_n :: B_{(n-1)} : B_n$, entonces $A_1 : A_n :: B_1 : B_n$.
- Si $A : B :: E : F$ y si $B : C :: D : E$, entonces $\mathrm{A : C :: D : F}$.
- Si $A : B :: C : D$ y $E : B :: F : D$, entonces $A + E : B :: C + F : D$.

El último grupo contiene únicamente a la proposición 15, la cual solo hace referencia a una proporción. Su expresión simbólica es simplemente $A : B :: nA : nB$.

Entre otros aspectos importantes, la anterior clasificación permite reconocer que no existen proposiciones que establezcan operaciones entre razones, a pesar de que sí se admitan operaciones entre las magnitudes implicadas en las razones. Este punto será trascendental en la argumentación que se dará más adelante respecto de la imposibilidad de reconocer en la teoría euclidiana una estructura para las razones, similar a la que se tendría para los números reales.

Aplicaciones de proporcionalidad

Una de las aplicaciones más interesantes de los números racionales corresponde a su uso en distintas situaciones asociadas a razones y proporciones.

Si bien la notación $\frac{a}{b}$ representa al cociente entre a y b, dentro de un contexto específico puede interpretarse de maneras distintas. Las fracciones, por ejemplo, representan una parte de la unidad y, por tanto, a y b puede representar una comparación entre ambas magnitudes.

Las razones se refieren a magnitudes que están expresadas mediante una cantidad y una unidad de medida. Comparan entre sí objetos diferentes. Por ejemplo, cantidad de material por unidad de área, combustible empleado por tiempo de viaje, fuerza aplicada por cantidad de masa, etcétera.

Ejemplo

Por cada 1000 g de concreto que se requiere para la construcción de una casa, se necesitan 750 g de arena y piedra chancada, por 250 g de cemento y agua. La razón entre la cantidad de arena y piedra chancada en relación con la de cemento y agua que se requiere es de 750 a 250. Se puede escribir esta comparación mediante la expresión $\frac{750}{250}$. El número racional correspondiente es $\frac{1}{3} = 3$. Esto significa que por cada 3 g de arena y piedra chancada se necesita de 1 g de cemento y concreto.

Si la razón se escribe de manera invertida, es decir , se tiene que, por cada grado de cemento y agua, se requieren 3 g de arena y piedra chancada. De modo que las cantidades se conservan, independientemente de la forma como se escriba la razón. Lo que en realidad le da un significado es saber de cuáles magnitudes hablamos en un contexto dado.

Una proporción es una igualdad entre dos razones. Para ilustrar este concepto, veamos el siguiente ejemplo:

La tensión eléctrica (T) es la fuerza de potencial que hay entre dos puntos cuanto entre ellos existe una diferencia en el número de electrones. La unidad de medida es el voltio (V).

Cuando los electrones circulan por un conductor, encuentran cierta dificultad en su movimiento, dado que el conductor ofrece cierta resistencia (R) que depende de varios factores: el material y la longitud del conductor y la sección por donde se realiza el movimiento. La unidad de resistencia es el ohmio (Ω).

A la razón entre la tensión y la resistencia eléctrica se le llama corriente eléctrica (C). De este modo, $C = \frac{T}{R}$. La unidad de medida es el amperio (A).

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Cuando se conecta un electrodoméstico a un tomacorriente en la pared, entre ambos sistemas hay una tensión eléctrica de 120 V(esta es la diferencia de potencial). Asimismo, cuando la resistencia del electrodoméstico es 20 Ω, la intensidad de la corriente eléctrica será de $\frac{120}{20}$ A.

Cuando la tensión eléctrica aumenta de 120 V en 120 V, la resistencia del electrodoméstico lo hará de 20 Ω en 20 Ω:

Tensión eléctrica (T)	Resistencia (R)
120 A	20 Ω
240 A	40 Ω
360 A	60 Ω
480 A	80 Ω
600 A	100 Ω
720 A	120 Ω

Obsérvese que, en cada caso, la intensidad de la corriente eléctrica siempre será de 6 A. Se puede afirmar que la tensión eléctrica y la resistencia, conservan una relación de proporcionalidad.

De este modo, si la tensión eléctrica es 540 V, es posible determinar la resistencia siempre que el amperaje sea 6 A. Para ello, se tiene en cuenta que $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}$. Por tanto, $6\,\mathrm{A} = \frac{540\mathrm{V}}{\mathrm{R}}$ y, en consecuencia, R = 90 Ω.

Desde luego, también es posible utilizar los valores de T y R para realizar el mismo cálculo, utilizando alguna de las razones dadas, tal como se muestra en la tabla 1.10.

Tabla 1.10. Cálculo de una proporción

Paso	Afirmación	Descripción
1	$\frac{120\mathrm{V}}{6\mathrm{A}} = \frac{540\mathrm{V}}{x},$	Se emplea una de las razones dadas; x representa la resistencia buscada
2	$\frac{120\mathrm{V}}{6\mathrm{A}} \cdot x = \frac{540\mathrm{V}}{x} \cdot x$	Se multiplica por x en ambos lados de la igualdad.
3	$\frac{120\mathrm{V}}{6} \cdot x \cdot \frac{6\mathrm{A}}{120\mathrm{V}} = 540\mathrm{V} \cdot \frac{6\mathrm{A}}{120\mathrm{V}}$	Se cancela x con x.
4	$\frac{120\mathrm{V}}{6} \cdot x \cdot \frac{6\mathrm{A}}{120\mathrm{V}} = 540\mathrm{V} \cdot \frac{6\mathrm{A}}{120\mathrm{V}}$	Se multiplica por el inverso multiplicativo de $\frac{120\mathrm{V}}{20\mathrm{A}}$ en ambos lados de la igualdad.
5	$x = 540\mathrm{V} \cdot \frac{6\mathrm{A}}{120\mathrm{V}}$	Se aplica el inverso multiplicativo al lado izquierdo de la igualdad.
6	$x = \frac{3240\mathrm{A}}{120}$	Se lleva a cabo la multiplicación correspondiente
7	$x = 27\mathrm{A}$	Se obtiene el valor de x, esto es, la resistencia buscada.

Cuando se tiene la igualdad entre dos razones, tenemos una proporción. De este modo, la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se lee «a es a b como c es a d». En consecuencia, los productos cruzados de los numeradores y los denominadores serán iguales entre sí. La razón por la cual esto ocurre se deriva de la construcción de los números racionales vista anteriormente.

Ejemplos

1. 5 es a 30 como 7 es a 42. En efecto, $\frac{5}{30}=\frac{7}{42}$, porque $5\cdot 42=30\cdot 7=210$
2. En una empresa, 8 de cada 20 personas son mujeres. En consecuencia, 2 de cada 5 son mujeres. Esto significa que 8 es a 20 como 2 a es 5.

Propiedades de las proporciones derivadas del libro V de los Elementos de Euclides

Las proporciones conservan algunas propiedades fundamentales. A continuación, se mencionan algunas de ellas:

Propiedad 1. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

Ejemplo

Puesto que $\frac{3}{8}=\frac{9}{24}$, entonces $\frac{3+8}{8}=\frac{9+24}{24}$. Luego, $\frac{11}{8}=\frac{33}{24}$. En efecto, $11\cdot 24=8\cdot 33$.

Propiedad 2. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$..

Ejemplo

Como $\frac{6}{7}=\frac{18}{21}$, entonces $\frac{6+7}{6}=\frac{18+21}{18}$. Esto significa que .$\frac{13}{6}=\frac{39}{18}$ Al verificar, tenemos que $13\cdot 18=39\cdot 6=234$.

Propiedad 3. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Ejemplos

Dado que $\frac{3}{5}=\frac{18}{30}$, tenemos que $\frac{3+5}{3-5}=\frac{18+30}{18-30}$. De esta manera, $-\frac{8}{2}=-\frac{48}{12}$. Al comprobar los resultados obtenidos, $-8\cdot 12=2\cdot(-48)=-96$.

Una empresa se encarga de la elaboración de tornillos para uso general y tornillos de alta resistencia. Se sabe que la venta para el público en general de ambas clases de tornillo es de 7 a 2. Si se vende una muestra de 900 tornillos, ¿Cuántos de ellos son de uso general?

Dado que la razón de entre la cantidad de tornillos para uso general y el total de tornillos es $\frac{7}{9}$, se tiene que $\frac{7}{9}$ es la cantidad de tornillos de uso general.

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

CAPÍTULO 2.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

La aproximación a la evolución histórica del concepto de número irracional se presenta indicando los aportes de matemáticos y civilizaciones que impulsaron el estudio de este concepto tanto en la Edad Antigua como en la Edad Contemporánea. Específicamente, se aborda desde la aparición intuitiva del número irracional mediante el estudio entre segmentos inconmensurables (Grecia antigua) hasta su reconocimiento como número en el siglo XIX en virtud de la aritmetización del análisis (Edad Contemporánea).

Desde la Antigüedad, como se describió en el capítulo 1, las nociones de número y magnitud estuvieron íntimamente ligadas. Muestra de ello es la oposición que hubo, durante mucho tiempo a dar cabida dentro de la matemática a los números negativos, pues estos no satisfacían todas las reglas de las operaciones con magnitudes.

A finales de siglo V a. C., en la antigua Grecia, se descubrió que no existen dos magnitudes m y n cuya razón sea igual a la relación entre el lado de un cuadrado y su diagonal. Recordemos que los griegos únicamente trabajaban con magnitudes medibles mediante números naturales y no lograron expresar numéricamente esta relación. A continuación, se describe cómo este hecho inicia la concepción de otra clase de números, distintos a los racionales.

Diálogo de Menón

«¿Podrás, Sócrates, decirme si la virtud puede enseñarse; o si no pudiendo enseñarse, se adquiere solo con la práctica; o en fin, si no dependiendo de la práctica, ni de la enseñanza, se encuentra en el hombre naturalmente o de cualquiera otra manera?» [24, p. 283].

En este diálogo, Sócrates le plantea a Menón a través de uno de sus esclavos, quien a propósito no tiene ningún tipo de educación previamente recibida, la pregunta: dado un cuadrado de lado 2, ¿Cómo es posible construir un cuadrado cuya área sea el doble del cuadrado dado?

Es decir, dado un cuadrado de lado 2, cuya área es 4, ¿cómo se puede construir un cuadrado de área 8?, ¿cuál es la longitud de su lado?

Mediante preguntas, Sócrates pretende que el esclavo llegue a la solución de la pregunta, aludiendo al hecho de que es posible recordar lo que ya se sabía. Este método para recordar esos conocimientos se conoce como mayéutica, según la cual, un individuo extrae los conocimientos en otro de forma similar a como lo haría una partera, donde lo que se logra obtener es el conocimiento verdadero.

La idea de Sócrates es considerar un cuadrado de lado 2, como se muestra en la figura 2.1.

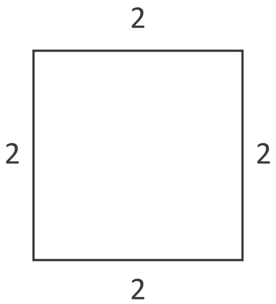


Figura 2.1. Cuadrado de lado 2.

Se pretende construir un cuadrado que tenga el doble del área que el cuadrado representado en la figura xx. Si colocamos un cuadrado adyacente a uno de los lados del cuadrado dado, se obtiene una figura geométrica que tiene precisamente un área que duplica a la del cuadrado de lado 2 (figura 2.2). Sin embargo, esto representa un problema, puesto que la figura que se obtiene es un rectángulo y no un cuadrado como inicialmente se pretendía.

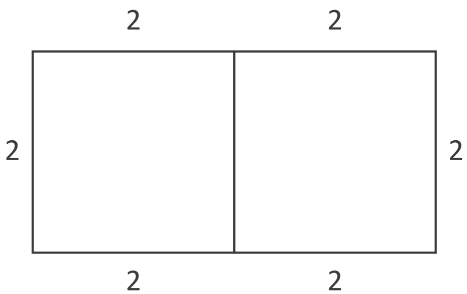


Figura 2.2. Cuadrado adyacente a uno de los lados del cuadrado dado.

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Al construir cuatro cuadrados como el primero, disponiéndolos de tal modo que se genere otro cuadrado de mayor área, se obtiene un cuadrado de área 16, y si bien no satisface las condiciones iniciales, tiene un área que es el doble de la que se requiere (figura 2.3).

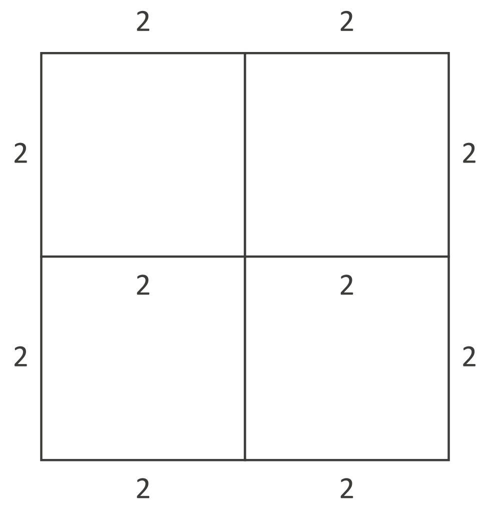


Figura 2.3. Construcción de cuatro cuadrados adyacentes entre sí de lado 2.

Se procede del siguiente modo: si se quiere construir un cuadrado que tenga la mitad del nuevo cuadrado de área 16, basta con trazar las diagonales necesarias dentro de cada uno de los cuatro cuadrados inicialmente construidos de área 4, de tal manera que, al unirlas, se genere otro cuadrado, como se muestra en la figura 2.4.

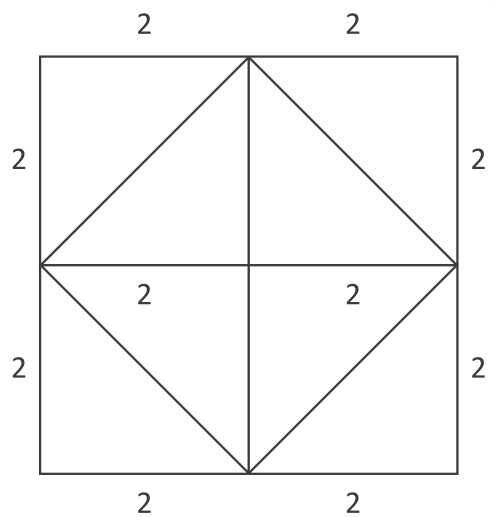


Figura 2.4. Construcción de un cuadrado del doble del área de un cuadrado dado.

Nótese el cuadrado que se ha coloreado en negro y amarillo en la figura 2.5. Si se toma el triángulo de color amarillo y se procede de manera similar en los otros tres cuadrados, se forma un cuadrado que tiene exactamente la mitad del área resultante de la suma de todos los cuatro cuadrados y, en consecuencia, se ha formado un cuadrado que tiene área 8, como se requería.

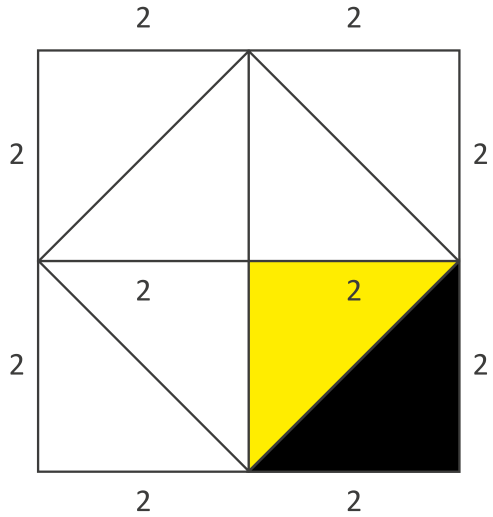


Figura 2.5. Representación de un cuarto de cuadrado del doble del área de un cuadrado dado.

Si bien el problema fue resuelto, esconde tras de sí una inquietante pregunta que generó una crisis entre los matemáticos de la antigua Grecia frente a sus creencias y filosofía de la matemática que habían construido con fervor y complacencia: ¿Cuál es la longitud del lado de dicho cuadrado?

La creencia de que los números podían medirlo todo era una simple ilusión, puesto que el lado del cuadrado generado no es conmensurable con otro segmento, la diagonal cuya longitud es 2. Esto significa que no hay un submúltiplo de la diagonal y el lado que pueda tomarse como unidad para medir ambos segmentos. Quedaba entonces eliminada de la geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud. Se había descubierto lo inconmensurable, aquello que causaría una crisis sin precedente en la historia de las matemáticas.

La imposibilidad de calcular de forma aritmética exacta la diagonal del cuadrado en función del lado no fue el único problema que se presentó en la antigua Grecia. Poco a poco surgieron otras situaciones asociadas a la inconmensurabilidad, como la relación entre el lado y la altura en un triángulo equilátero o entre la circunferencia y su diámetro. Esta última relación es conocida como pi (π).

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

El teorema de Pitágoras

Uno de los aportes más importantes en la historia de la matemática está dado por el teorema de Pitágoras: «El cuadrado construido sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo, es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los lados que rodean al ángulo recto». Si bien no ha sido posible identificar al creador del famoso teorema, se le atribuyen a Pitágoras la concepción general del enunciado y los primeros intentos por demostrar la proposición general.

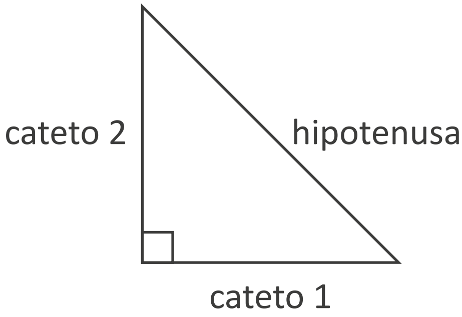


Figura 2.6. Triángulo rectángulo y sus partes.

Considérese un triángulo rectángulo (véase la figura 2.6), cuyos catetos son 6 y 8. Podemos calcular la longitud de la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras, de la siguiente forma:

Sea h la longitud de la hipotenusa y a y b los catetos correspondientes. Se cumple que:

$$h^2 = a^2 + b^2.$$

Luego, al sustituir los valores en la expresión anterior, obtenemos que

$$h^2 = 6^2 + 8^2$$
$$h^2 = 36 + 64$$
$$h^2 = 100$$

En consecuencia, se puede afirmar que $h = 100$.

Nótese que no se ha usado aquí ningún símbolo para calcular el valor de h. No fue hasta el año 1525 cuando el matemático Christoph Rudolff representó a las raíces cuadradas mediante el $\sqrt{}$.

Por tanto, si h^2, entonces $\sqrt{100} = 10$.

Puesto que h es un número natural, a la terna (6, 8, 10) se le llama terna pitagórica.

En la India, aproximadamente en la misma época de Pitágoras, se mencionaron cuatro ternas pitagóricas irreducibles, esto es, que no se obtienen mediante proporciones entre sus términos: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) y (12, 35, 37). Cualquiera que haya sido el conocimiento de la relación pitagórica que se tuviera en la India, es seguro que no fue desde allí de donde pasó a Grecia, sino desde Egipto. En Babilonia, se encontraron ternas conservadas en tablas. La terna (3, 4, 5) fue muy usada en Egipto y por eso se con el nombre de triángulo egipcio a aquel triángulo que cumple con esta condición.

No se considera que los pitagóricos hubieran hecho algún tipo de demostración del teorema de Pitágoras [5]. ¿Cuántos triángulos rectángulos hay? En la escuela se conocía el enunciado atribuido a Tales, según el cual todo triángulo inscrito a una semicircunferencia es rectángulo. Deberían existir, por tanto, muchos más triángulos que los de las listas conocidas.

En efecto, se pueden obtener ternas pitagóricas irreducibles a partir de las siguientes expresiones:

1. Sean a, b y c las longitudes de un triángulo rectángulo, con $a < b < c$. Entonces:

$$a = n,$$
$$b = \frac{(n^2 - 1)}{2},$$
$$c = \frac{(n^2 + 1)}{2}.$$

Donde n es un número natural impar distinto de 1.

Si $n = 3$, se tiene que

$$a = 3$$
$$b = \frac{(3^2 - 1)}{2} = 4$$
$$c = \frac{(3^2 - 1)}{2} = 5$$

Si $n = 5$, entonces

$$a = 5$$
$$b = \frac{(5^2 - 1)}{2} = 12$$
$$c = \frac{(5^2 + 1)}{2} = 13$$

2. *Fórmulas platónicas.* Sean a, b y c las longitudes de un triángulo rectángulo, con $a < b < c$ tales que, $a = n^2 - m^2$, $b = 2mn$ y $c = n^2 + m^2$, con $m < n$.

Para $m = 1$ y $n = 2$, se obtiene que

$$a = 2^2 - 1^2 = 3$$
$$b = 2 * 1 * 2 = 4$$
$$c = 2^2 + 1^2 = 5$$

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

El número irracional

Dos magnitudes son conmensurables si tienen una medida común. Esto significa que existe una unidad que se puede expresar mediante un número racional que divide a ambas magnitudes un número exacto de veces.

Por otra parte, dos magnitudes son inconmensurables si no existe tal unidad finita. Esto implica que, en el proceso de hallar una máxima medida común, resulta que *ningún resto mide al resto que le precede*, es decir, el proceso se vuelve interminable porque nunca se llegará a un residuo nulo. Por consiguiente, un número irracional no se puede escribir como el cociente de dos números enteros.

Como se afirmó en el capítulo anterior, los números $\frac{1}{2} = 0,5$ o $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$ o son números racionales, puesto que son el resultado de dividir dos números enteros, y su expresión decimal es finita o infinita periódica.

En cambio, un número irracional no es el cociente de dos números enteros y, por tanto, su desarrollo decimal no puede ser finito ni infinito periódico: 1,12122122212222...

Hípaso de Metaponto (siglo VI a. C.) fue un matemático de la escuela pitagórica, reconocido por sus aportes al descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, los números irracionales y el pentágono referido al dodecaedro [25]. Sin embargo, se atribuye a Teodoro de Cirene (465 a. C. - 398 a. C.) la demostración de la irracionalidad de y . Es extraño, y significativo, que no se le haya atribuido el descubrimiento de la irracionalidad de .

En efecto, este descubrimiento fue atribuido a los primeros pitagóricos, para quienes fue una sorpresa tropezarse con este nuevo número. Hipaso hizo pública su construcción sobre la inscripción de un dodecaedro en una esfera, así como el descubrimiento de las cantidades irracionales, probablemente de $\sqrt{2}$ o $\sqrt{5}$. El descubrimiento se hizo geométricamente, cuando se advirtió que la diagonal de un cuadrado de lado 1 no podía ser medido en términos del lado o de cualquiera de las partes iguales en que ese lado podía subdividirse, por pequeñas que fueran. La irracionalidad de $\sqrt{2}$ se probó por medio de una *reductio ad absurdum* que se presenta a continuación [5].

Supuestos

1. Considérese el cuadrado ABCD, de lado 1 que se muestra en la figura 2.7.

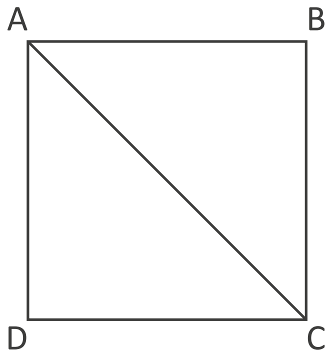


Figura 2.7. Diagonal de un cuadrado de lado 1.

2. AC es una diagonal y AB uno de los lados del cuadrado.
3. AC y AB son conmensurables y, por tanto, $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$.
4. AC y AB son primos entre sí, es decir, el máximo común divisor de ambos es 1.

Por tanto,

a. $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$.
b. $\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$, elevando al cuadrado en ambos lados de la igualdad.
c. $\frac{AC^2}{AB^2} = 2$.
d. AC^2 y $2AB^2$.
e. Entonces, $2AB^2$ es par y, en consecuencia, AC^2 también lo es. De modo que AC es par y, por ende, $AC = 2n$.
f. AB es impar, puesto que AB y AC son primos relativos.
g. $AC^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2AB^2$(d)
h. $2n^2 = AB^2$ (g)
i. $2n^2$ es par y, por tanto, AB^2 también lo es
j. AB es par (i)
k. AB es impar (f) e impar (i), lo cual es una contradicción.

La conclusión es que $\sqrt{2}$ es inconmensurable con la unidad. Por tanto, es irracional en el sentido de que no es racional, puesto que no se puede expresar como una razón. Los expertos aún no han logrado situar la fecha del descubrimiento que anonadó a los pitagóricos al contradecir su principio fundamental: «todas las cosas son números».

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Si bien es posible que el primer número irracional haya sido descubierto por Hípaso, esto no puede demostrarse. La historia deja en evidencia que se atribuye a Hípaso el conocimiento asociado al dodecaedro, poliedro regular cuyas doce caras son pentágonos regulares. Por otra parte, entre los pitagóricos fue bastante común el interés por el estudio del pentágono, cuyo símbolo era un pentagrama, esto es, un pentágono regular cuyos lados se prolongan hasta sus puntos de intersección. El interés de Hípaso por los pentágonos y pentagramas pudo haberlo conducido a la noción de inconmensurabilidad. Sin embargo, Hípaso ignoró el hecho de que al considerar todas las diagonales en un pentágono regular, estas componen un pentagrama encerrando otro pentágono regular más pequeño (figura 2.8) [25].

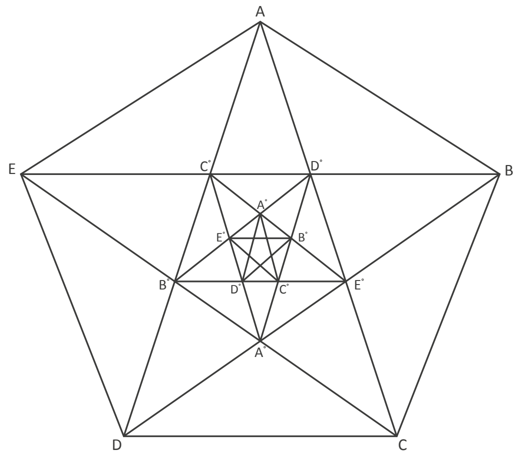


Figura 2.8. Pentagrama.
(Tomado de G. García Murillo [25, p. 86]).

Este proceso podría continuar de manera indefinida. Hípaso pudo haber continuado con su trabajo, pero hubiese sido poco probable calcular otras muchas más magnitudes inconmensurables en aquella época, dada la complejidad del diseño.

Sucesiones que convergen a raíz de 2 por los pitagóricos

A continuación, se revisan algunos de los algoritmos que utilizaron los pitagóricos para comprender el significado de $\sqrt{2}$ [5].

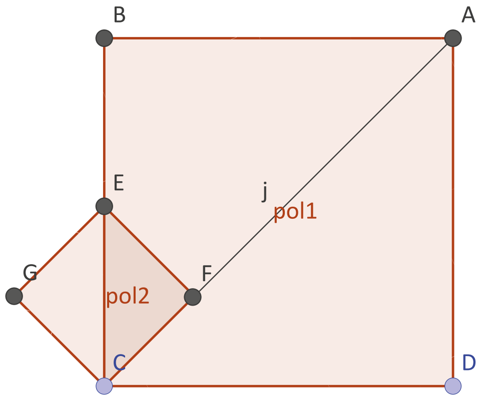


Figura 2.9. Construcción de un cuadrado sobre la diagonal de un cuadrado dado, parte 1.

a. Como se observa en la figura 2.9, ABCD es un cuadrado.

b. $\overline{AC}$ es una diagonal de ABCD.

c. F es un punto de $\overline{AC}$, tal que $\overline{AF} \cong \overline{AC}$.

d. E es un punto de $\overline{BC}$, tal que $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{AC}$ en F.

e. Se traza entonces $\overline{AE}$ (figura 2.10).

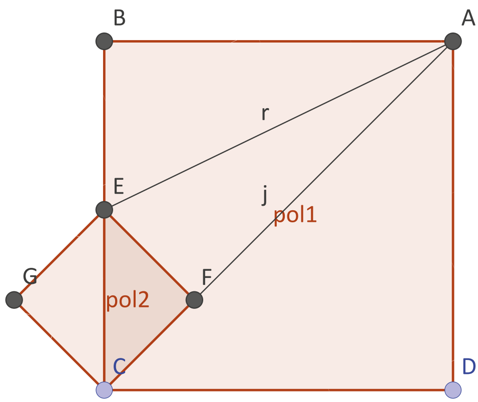


Figura 2.10. Construcción de un cuadrado sobre la diagonal de un cuadrado dado, parte 2.

f. En el triángulo AFE, se tiene que $AE^2 = AF^2 + EF^2$

g. En el triángulo ABE, se cumple que $AE^2 = AB^2 + BE^2$

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

h. Puesto que $\overline{AF} \cong \overline{AB}$, se tiene que $EF^2 = BE^2$

i. $\angle$ ECF = 45º (b)

j. $\angle$ CEF = 45º (d, i)

k. $\angle$ ECF $\cong$ $\angle$CEF (i, j)

l. $\overline{EC}$ es una diagonal en el cuadrado CFEG

m. $\overline{CF} \cong \overline{EF} \cong \overline{BE}$

Si D es la diagonal $\overline{AC}$ y l es el lado $\overline{AB}$, se tiene que

$$CF = AC - AF$$

n. $CF = AC - AF = D - l$

o. $CE = BC - BE = BC - CF = BC - (AC - AF) = l - (D - l) = 2l - D$.

Por tanto, del cuadrado ABCD se ha obtenido el cuadrado CFEG. Este proceso es iterable de forma infinita (en lo que Fermat llama «disminución sin límite»), de modo que lleva a una magnitud inconmensurable.

Los pitagóricos consideraron el proceso inverso: dados D y l, la diagonal y la longitud de un cuadrado, respectivamente, entonces:

$$D^2 = l^2 + l^2 = 2l^2.$$

Es bien sabido que D y l son magnitudes inconmensurables. Los pitagóricos, a partir del cuadrado de diagonal D lado D y l, construyen un cuadrado de diagonal $D + 2l$ y de lado $D + l$ (figura 2.11).

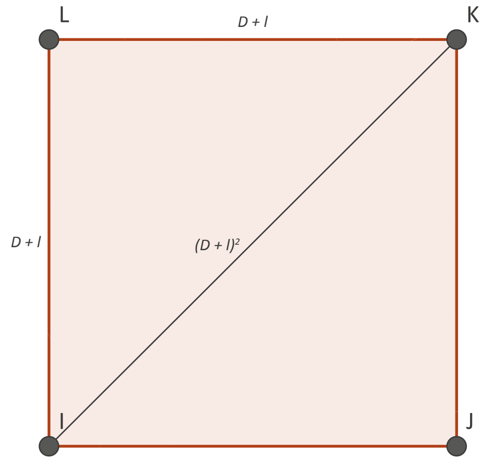


Figura 2.11. Construcción de un cuadrado sobre la diagonal de un cuadrado dado, parte 3.

En el año 490 a. C. nace Zenón de Elea. Los puntos de vista sobre su obra son muy diversos. Generalmente prevaleció la idea de Platón, según la cual Zenón fabricó argumentos contra quienes atacaban a su maestro Parménides. De manera análoga, Aristóteles afirmó que Zenón fue el creador de la dialéctica, es decir, de lo que tiempo después de Aristóteles recibiría el nombre de lógica. Según Russell, fue Zenón quien explicitó las dificultades inherentes a los problemas de continuidad, lo infinitesimal y lo infinito. A propósito del infinito, fue Zenón quien formuló la siguiente afirmación:

> Si existe multiplicidad, esta estará integrada por unidades que, o poseen magnitud o no poseen magnitud. Si las unidades poseen magnitud cada unidad constará de partes, relacionadas unas con las otras y nunca podrá decirse que una parte sea la última; por consiguiente, estas partes serán infinitas y la multiplicidad que ellas integran será infinitamente grande. Si las unidades no poseen magnitud, cada unidad no altera aquello a lo cual se agrega o de lo cual se quita; entonces no posee realidad alguna y la multiplicad integrada por estas partes será infinitamente pequeña. [5]

La aporía de la multiplicidad consiste en que ella será tanto infinitamente grande como infinitamente pequeña. En conclusión, la divisibilidad infinita implica un proceso infinitamente grande.

Las aporías de Zenón en relación con el movimiento tienen una relación directa con el continuo. Aristóteles da cuatro de los argumentos de Zenón: la *dicotomía*, el *Aquiles*, la *flecha* y el *estadio*.

En lo que respecta a la dicotomía, Zenón afirma que, si existe el movimiento, es necesario que aquello que se mueva recorra infinitas magnitudes en un tiempo limitado. Como esto es imposible, el movimiento no existe. Zenón demuestra esta hipótesis a partir de la distancia que se debe recorrer. Como toda distancia es divisible hasta el infinito, es necesario que el objeto que se mueve alcance primero la mitad de la distancia que debe recorrer y luego el resto. Pero antes de recorrer la mitad que le falta, debe recorrer la mitad de esta. Si estas mitades son infinitas, porque es posible hallar la mitad de toda mitad obtenida, es imposible recorrer infinitas magnitudes en un tiempo limitado. Es posible establecer una relación matemática que describa esta situación. Esto es,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}=1$$

Zenón afirma que esta suma nunca será 1. En efecto, nunca lo será, aunque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} = 0\frac{1}{2^{n+1}}$ es ciertamente convergente (criterio de D'Alembert).

En lo que respecta a la aporía de *Aquiles y la tortuga*, si el movimiento no existe, lo más lento nunca será alcanzado por lo más rápido. Pero como esto es imposible, el movimiento no existe. Al argumento se le llama Aquiles porque, precisamente, Aquiles no puede dar alcance a una tortuga que persigue, pues es necesario que el perseguidor, antes de atravesar la meta, llegue primero al lugar del cual partió el que huye. Pero cuando el perseguidor llegue a ese punto, el perseguido habrá avanzado una cierta distancia, aunque esta sea bastante corta con relación a la que debería recorrer el perseguido, quien ha de ser más veloz.

Por el solo hecho de suponer distancias cada vez menores que el infinito, a causa de las divisiones cada vez menores al infinito, Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. Por tal razón, la tortuga siempre estará delante de Aquiles, y ninguno de los dos alcanzará nunca la totalidad del recorrido. En contraste con la aporía de la dicotomía, Zenón admite que hay lugar a movimiento y comprueba que ni la tortuga ni Aquiles alcanzarán la meta.

Frente a la aporía de la flecha, Zenón afirma que en cada instante una flecha está en una posición determinada. Si el tiempo considerado es lo suficientemente pequeño, la fecha no podría ser lanzada, por lo que estaría en reposo en ese instante. Si se consideran infinitos periodos de tiempo lo suficientemente cortos, la fecha continuaría en reposo, con lo cual Zenón prueba que el movimiento de la fecha es imposible.

En la aporía del estadio, en la tribuna se hallan cuatro soldados en fila que permanecen en reposo y que representamos por AAAA. De un extremo del estadio parte una columna de cuatro solados BBBB, en dirección a la tribuna. Del extremo contrario parte otra columna CCCC en dirección opuesta para alinearse también con la fila de los A. La columna de los B y los C desfilan exactamente a la misma velocidad. Hay dos momentos que nos interesan:

Momento 1:

AAAA

BBBB

CCCC

Momento 2:

AAAA

BBBB

CCCC

Cuando la columna de los A entra en contacto con los C, vemos que los B recorren dos A, mientras que en el mismo tiempo los C han recorrido 4 B. Por tanto, dado que la longitud de los A, los B y los C es la misma, observamos que la velocidad de la columna de los C es el doble de la de los B, cuando habíamos dicho que en realidad era la misma.

Una vez concluida nuestra revisión por la historia del número irracional en la antigua Grecia, a continuación, veremos cómo en la obra de varios matemáticos de la escuela alemana se promueve la separación definitiva de los conceptos de número y de magnitud. Los matemáticos en cuestión son Leopold Kronecker (1823-1891), Richard Dedekind (1831-1916) y Georg Cantor (1845-1918).

La aritmetización del análisis

Durante la primera mitad del siglo XIX se desarrolló un importante movimiento en búsqueda de un mayor rigor en la matemática en general [26]. Claros representantes de este movimiento fueron Augustin Louis Cauchy (1729-1857), Bernard Bolzano (1781-1848) y Niels Henrik Abel (1802-1829), por solo citar tres. Los conceptos básicos de las matemáticas fueron puestos en tela de juicio y aparecieron definiciones rigurosas de función continua, derivada en un punto y límite (este último se convirtió en el más básico de los tres y sirvió como fundamento del cálculo diferencial, que no se estudiará en este texto). Poco a poco surgieron nuevos problemas y, con ellos, nuevos conceptos —como los de continuidad y convergencia— no se hicieron esperar. Pero los problemas no solo se originaron en las ramas superiores de la matemática; también en sus raíces se encontraron cuestiones significativas que merecían revisión. Entre estos interrogantes esenciales, en procura de una presentación rigurosa del concepto de límite, apareció la necesidad de precisar el concepto número real. Así, a partir de la segunda mitad del siglo XIX comenzaron a plantearse distintas aproximaciones a la conceptualización de los números reales.

Los números irracionales y Richard Dedekind

Richard Dedekind (1831-1916) nació en un pequeño pueblo del centro de Alemania: Braunschweig, el mismo lugar que vio nacer a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los matemáticos más importantes de la historia. Dedekind siguió los pasos de su predecesor y estudió en la Universidad de Göttingen, y allí terminó su doctorado en 1852, bajo la supervisión de Gauss. Dos años después de obtener su doctorado, Dedekind presentó su tesis para poder enseñar en la universidad, titulada *Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik* (Sobre la introducción de nuevas funciones en la matemática). Desde muy temprana edad, Dedekind mostró particular interés por las operaciones, por encima de los elementos mismos [27]. Esta preocupación lo llevaría a la visión abstracta de la matemática que logró en su madurez. El objetivo principal de Dedekind en esta pequeña tesis era proporcionar un método general para deducir la forma en que se deben extender las operaciones aritméticas de un dominio numérico más restringido a uno más general. Así lo describió el propio Dedekind.

Desde el punto de vista matemático e histórico, lo más interesante es el análisis que hace del origen de las diferentes operaciones aritméticas. Dedekind que la más simple de ellas es la de encontrar el sucesor de cierto número y que esta, repetida varias veces, da lugar a la suma. Luego, la repetición de la suma origina la multiplicación que, a su vez, da origen a la potenciación. Otro detalle importante sobre las concepciones matemáticas de Dedekind es su noción de número, como ente creado por la mente humana. A este respecto, él plantea que los números naturales permiten la realización de

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

las operaciones de suma y de multiplicación sin problema alguno, pero que no sucede lo mismo cuando se quieren realizar las operaciones inversas: la resta y la división.

La imposibilidad de realizar estas operaciones lleva a la creación de nuevos números para los cuales sean válidas las operaciones indirectas. En la tesis de 1854, Dedekind considera que el origen de los números irracionales es la operación de potenciación con exponente racional, idea que desecha en su madurez, luego de prestarle más atención a la fundamentación de la aritmética de los números reales. Esta disertación de Dedekind contiene varias de las ideas sobre la fundamentación de la matemática que desarrolló en su madurez,: la importancia de las operaciones realizadas sobre los elementos de cierto conjunto, por encima de los elementos en sí; además muestra, de forma temprana, su concepción más profunda sobre la filosofía de la matemática: la existencia de los entes matemáticos gracias a su creación por parte de la mente humana, en especial los números.

La principal motivación de Dedekind para llevar a cabo la construcción de los números irracionales la encontró ejerciendo la docencia. En 1858 tuvo que enseñar los rudimentos del cálculo diferencial. Al preparar dicho curso se enfrentó a que las fundamentaciones de varios teoremas básicos del cálculo se basaban en argumentos geométricos, que no consideraba válidos; era necesario lograr una demostración puramente aritmética.

En su obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Continuidad y números irracionales) Dedekind parte del conocimiento del dominio de los números racionales y muestra que existe una «operación» que no puede realizarse en este dominio: la operación de «cortar». Nótese como el problema de la continuidad en $\mathbb{Q}$ no se deriva de la imposibilidad de realizar una operación inversa, sino de una nueva: se tiene una operación que no se puede realizar y es necesario aumentar el dominio numérico, de tal forma que sea posible dicha operación.

Dedekind, en su memoria de 1872 plantea al respecto el siguiente postulado:

> […] Mientras que la realización de estas dos operaciones es siempre posible, la realización de las operaciones inversas ha sido en cada caso el motivo real de un nuevo acto creativo; entonces los números negativos y fraccionarios son creados por la mente humana; y con el conjunto de los números racionales se ha obtenido un instrumento de gran perfección. [28, p. 159]

En esta cita se descubre cómo Dedekind mantiene buena parte de las ideas que ya había planteado en 1854: del origen de los números naturales hasta la construcción de $\mathbb{Q}$, permanece inalterable, pero desaparece la idea de la utilización de la potenciación con exponente no entero como origen de los números irracionales. Nótese también que en la fecha de publicación de esta monografía ya Dedekind había dedicado varios años al estudio del problema de la factorización única en los enteros algebraicos (se describirá con detalle en el siguiente capítulo) de una extensión simple de $\mathbb{Q}$, que lo llevó a la definición de cuerpo, lo que, a su vez, le permitió valorar mejor la importancia de estas operaciones básicas, que son características de un cuerpo.

> Dedekind ve en la necesidad de realizar nuevas operaciones la ampliación de los dominiosnuméricos. En particular, a la que nos interesa, la llama «cortadura». Dedekind demuestra que la operación de corte es compatible con los números racionales; sin embargo, $\mathbb{Q}$ no es cerrado para esta operación (el resultado de operar dos números racionales no siempre es un número racional). En otras palabras, existen cortes no definidos por números racionales. La idea de cortadura le proporciona los medios para caracterizar la continuidad de la línea recta, a la que da validez de axioma:
>
> Si todos los puntos de la línea recta se dividen en dos clases, tal que todo elemento de la primera clase se encuentra a la izquierda de todo elemento de la segunda clase, entonces existe un único punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos secciones.

En la memoria, Dedekind se sirve de las cortaduras para la construcción de los números reales, y para demostrar que cumplen este axioma de continuidad. Se debe hacer especial énfasis en que Dedekind no menciona en ningún momento que esté desarrollando una teoría para las magnitudes irracionales, sino números, y tampoco menciona la noción de tiempo.

Relaciones de orden total y parcial

En apartados anteriores, se construyeron las clases de números enteros y de números racionales, con base en los números naturales. El próximo paso es la construcción de la clase delos números reales. Sin embargo, su construcción depende de la noción de orden(la relación «ser menor que») y requiere de su revisión. La construcción de las clases numéricas no es posible sin el concepto y las propiedades del orden. Una vez que tengan los números racionales ordenados, es posible entrar a definir el número real [29].

Definición 2.1. *Una relación de orden parcial es una relación R definida en un conjunto A, tal que R es:*

1. *Asimétrica. Si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \notin R$ o $a = b$.*
2. *Transitiva: Si $(a, b) \in R$, y $(b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$.*

Definición 2.2. *Una relación de orden serial R definida en una clase A es una subclase de $A \times A$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. *Asimétrica. Si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \notin R$ o $a = b$..*
2. *Transitiva. Si $(a, b) \in R$ y (b, c), $\in (a, c) \in R$.*

3. *Conexa. Para todo a, b ∈ A, con a ≠ b, o bien (a, b) ∈ R, o bien (b, a) ∈ R.*

Esta segunda clase de relación suele llamarse hoy día *relación de orden total*. Su característica particularmente notoria es la conexidad (propiedad 3), que asegura que todos los elementos de la clase A se encuentran en una sola cadena serial. A continuación, se presentan algunos ejemplos de relaciones de orden, tanto de orden total como de orden parcial.

Sean S={1,2,3} y A la clase de las partes de S, o sea, la clase de todas las subclases de S. Tenemos entonces que

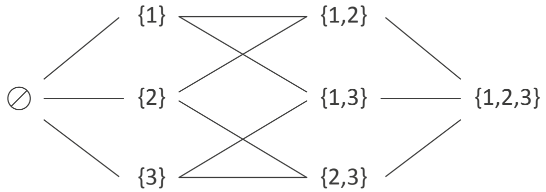
$$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1, 2, 3,\}\}$$

Sea R la relación «estar contenido en» definida en la clase A. Ahora bien, R es asimétrica y transitiva puesto que, si $X \subset Y$, no necesariamente se tiene qué $Y \subset X$; y si $X \subset Y$ y $Y \subset Z$, entonces $X \subset Z$. Pero R no es conexa, porque si se consideran las clases $X = \{1,2\}$ y $Y = \{1,3\}$, es claro que ni $X \subset Y$ ni $Y \subset X$, es decir, $(X,Y) \subset R$ y $(Y,X) \subset R$.

{1} - {1, 2} - {1, 2, 3},
{1} - {1, 3} - {1, 2, 3},
{2} - {1, 2} - {1, 2, 3},
{2} - {2, 3} - {1, 2, 3},
{3} - {1, 3} - {1, 2, 3},
{3} - {2, 3} - {1, 2, 3}.

En la figura 2.12 se demuestra el esquema completo, donde los segmentos leídos de izquierda a derecha indican contenencia.

Figura 2.12. Diagrama con cadenas de contenencia entre subconjuntos de un conjunto de cardinal 3.



En resumen, la relación R es una relación de orden parcial que determina seis cadenas en la clase A.

Sean A={1,2,3,4,6,8,12,24}, el conjunto de los divisores de 24; $R \in A \times A$ la relación 'ser divisor de'. Nuevamente, se tiene una relación asimétrica (si , no necesariamente se tieneque) y transitiva (si a|b y b|c, entonces), pero no conexa en la clase A, porque, por ejemplo, ni 2|3 ni 3|2. Se trata, por lo tanto, de una relación de orden parcial. Las cadenas que determina en A son las que se muestran en la figura 2.13.

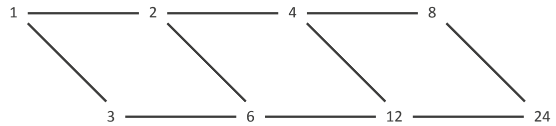


Figura 2.13. Cadenas sobre los divisores de 24.

Si la relación de orden R definida en un determinado conjunto A es conexa, es claro que se establece una sola cadena serial porque, dados dos elementos diferentes cualesquiera , tenemos que $(a,b) \in R$, o bien $(b,a) \in R$; luego a y b necesariamente están en la misma cadena. Ahora bien, si dos elementos cualesquiera están necesariamente en la misma cadena, no puede haber más de una cadena.

Tómese, como ejemplo, el conjunto $B = \{0, 1, 2, ...\}$ y R la relación "<". Es claro que esta relación es asimétrica, transitiva y conexa, y por lo tanto es una relación de orden total.

Se establece una sola cadena serial:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \cdots$$

Relaciones de orden parcial como las de orden total, «transfieren» la relación a lo largo de la cadena.

Cuando se escribe $\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1, 2, 3\}$ o $1\backslash 2\backslash 3\backslash 4\backslash 8\backslash 24$, $\emptyset$ no solo está contenido en la próxima clase, en la cadena $\{1\}$, sino también en todas las clases de ahí en adelante. Igualmente, 2 no solo es un divisor de 4, sino de todos los números que le siguen en la cadena.

El hecho de que la relación "<" sea de orden total en los números naturales y que determine una sola cadena serial es, precisamente, la justificación de esta representación de dichos números sobre una recta.

Orden en los números racionales

Si $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ son números racionales, se dice que $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ si $ps < rq$.

Ejemplo

$\frac{2}{7} < \frac{5}{12}$, puesto que $2 \cdot 12 < 5 \cdot 7$, luego, $24 < 35$.

$-\frac{9}{2} < -\frac{14}{5}$, dado que $-9 \cdot 5 < -14 \cdot 2$. En consecuencia, $-45 < -28$.

Ahora, es posible emplear el orden definido para analizar una propiedad importante de los números racionales. La clase de los números racionales es densa, es decir, «entre» dos números racionales cualesquiera, siempre se puede encontrar otro número racional [29]. En el sentido de la palabra *entre* está implícita la noción de orden. Dados x, y números racionales cualesquiera, con $x < y$, siempre es posible encontrar un número racional z tal que $x < z < y$.

Aplicando algunas propiedades de la relación "<", se tienen las siguientes expresiones:

$x < y$;

$x + x < x + y$, sumando x en ambos lados de la desigualdad;

$2x < x + y$ sumando $x + x$;

$x < \frac{x+y}{2}$, multiplicando por el inverso de 2 en ambos lados de la desigualdad (1).

Por otra parte,

$x < y$;

$x + y < y + y$, sumando y en ambos lados de la desigualdad;

$x + y < 2y$, sumando $y + y$;

$\frac{x+y}{2}$, multiplicando por el inverso de 2 en ambos lados de la desigualdad (2).

De este modo, combinando (1) y (2), se tiene que $x < \frac{x+y}{2} < y$. Ahora bien, si x e y son números racionales, entonces $x + y$ es un número racional (basta referirnos a nuestra definición de la adición de números racionales). Asimismo, si $x + y$ es un número racional, entonces $\frac{x+y}{2}$ es un número racional (basta citar nuestra definición de multiplicación de números racionales).

Ejemplo

Dados los números racionales $\frac{6}{11}$ y $\frac{2}{5}$, calcular un número racional entre ambos.

Si $x + y$ es un número racional, entonces $\frac{x+y}{2} = \frac{\frac{6}{11}+\frac{2}{5}}{2} = \frac{\frac{52}{55}}{2} = \frac{52}{110}$ es un número racional. De manera similar, se puede encontrar otro número racional entre y $\frac{52}{110}$ y $\frac{2}{5}$:

Este proceso se puede repetir indefinidamente y nunca terminaría. Por esta razón, afirmamos que el conjunto de los números racionales es denso.

Uno de los grandes obstáculos para un entendimiento adecuado de los sistemas numéricos radica en creer que la densidad implica la continuidad. De hecho, aunque los números racionales son densos, no son continuos. En contraste, los números reales sí tienen la continuidad, y ella es indispensable, entre otras cosas, para la descripción matemática del movimiento. Por consiguiente, para propósitos de las aplicaciones de las matemáticas se requiere un conjunto numérico continuo. Este será el próximo paso la construcción de tal conjunto.

Las cortaduras de Dedekind y los números reales

En el enfoque de Dedekind, se percibe el uso de conjuntos de números racionales para definir números reales [28]. Empleando definición de relación de orden, se definen los conjuntos A y B como sigue:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : 3x - 5 < 4\},$$
$$B = \{ x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}.$$

Ambos conjuntos, A y B, están acotados, es decir, existe un número racional u tal que $x \leq \underline{u}$ para todo $x \in$ A, y un número racional v tal que $x \leq v$ para todo $x \in B$. Tanto u como v se llaman cotas superiores de un conjunto dado; u es cota superior del conjunto A y v es cota superior del conjunto B. Basta poner $u = 5, v = 2$ para comprobar su existencia. Ahora bien, también es claro que cada uno de los conjuntos tiene más de una cota superior.

Nota: No todo conjunto de números racionales es acotado; por ejemplo,

$D = \{x \in \mathbb{Q}$: x es múltiplo entero de 4$\}$ no es un conjunto acotado.

Definición 2.3 *Dado un conjunto no vacío y acotado S de números racionales, un número s se llama la mínima cota superior de S siempre que*

a. s es una cota superior de S.

b. si t es cualquier cota superior de S, entonces $s \leq t$

Ahora bien, la mínima cota superior del conjunto A es claramente el número racional 3, pero claramente la mínima cota superior del conjunto B no puede ser racional (intuitivamente, se ve que ésta ha de ser $\sqrt{2}$)

La observación clave es que la densidad, propiedad que posee el conjunto de los números racionales (entre dos números racionales siempre hay otro número racional), no implica ni es equivalente a la continuidad, y esta última característica es la requerida para describir espacio, tiempo y movimiento. La recta de los puntos que corresponden a números racionales contiene discontinuidades: los «huecos» o «brechas» de Dedekind.

Dedekind define el número irracional $\sqrt{2}$ como la mínima cota superior del conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 < 2\}$, puesto que para todo $x \in B$, $x < \sqrt{2}$, y si t es cualquier otra cota superior, entonces $\sqrt{2} \leq t$. A la menor cota superior de un conjunto dado, se le llama el supremo (sup) de B. Para este caso particular $(B) = \sqrt{2}$.

La siguiente definición introduce a los números reales. Se utilizan conjuntos de números racionales para su propósito.

Definición 2.4. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ es una cortadura de Dedekind si satisface las siguientes tres condiciones:*

a. $A \neq \emptyset$.

b. Si $p \in A$ y $q < p$ entonces $q \in A$

c. No existe $p \in A$ tal que $q \leq p$ para todo $q \in A$; en otras palabras, A n o puede tener elemento máximo (la menor cota superior que pertenece al conjunto)-

Una cortadura de Dedekind es de manera intuitiva un subconjunto de números racionales $C = \{x \in \mathbb{Q} : x < a\}$ para algún número racional a.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de conjuntos de números racionales que son cortaduras y otros que no lo son.

Ejemplos

El conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ es una cortadura.

El conjunto $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}$ no es una cortadura, puesto que tiene un elemento máximo que es 3.

El conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ no es una cortadura, puesto que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

En adelante, a las cortaduras de Dedekind se les llamará números reales. Al conjunto de los números reales, lo denotaremos por medio del símbolo $\mathbb{R}$.

Axioma de completitud de los números reales

Según el procedimiento de Dedekind, se postula que cualquier conjunto no vacío de números racionales que está acotado superiormente tiene una mínima cota superior que es un número real, luego los números reales son números racionales o irracionales. Los números reales se derivan, entonces, de un axioma acerca de la existencia de algo. Claramente en el esquema de Dedekind hay el problema de definir algo cuya existencia no se ha demostrado, sino postulado. Este postulado se conoce como el axioma de completitud de los números reales:

Todo subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}$ acotado superiormente posee extremo superior, esto es, existe un número real $b \in \mathbb{R}$, tal que $b = (S)$.

Propiedades de los números reales

Definición 2.5. *Adición de números reales*

Para cualesquiera cortaduras (números reales), se define la suma entre α *y* β *como* $\alpha + \beta = \{a + b : a \in \alpha \text{ y } b \in \beta\}$.

Definición 2.6. *Multiplicación de números reales*

Para cualesquiera cortaduras (números reales) α *y* β se define el producto entre y como $\alpha \cdot \beta = \{a \cdot b : a \in \alpha \text{ y } b \in \beta\}$.

Cada suma o producto de números reales es un conjunto de infinitas sumas o productos de números racionales.

Si $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, es claro que $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}: x < 1\}$ y $\beta = \{y \in \mathbb{Q} : y < 2\}$, luego, $\alpha + \beta = 1 + 2 = \{x + y \in \mathbb{Q}: x + y < 1 + 2\}$. Por tanto, $1 + 2 = 3$.

Si $\alpha = 2$ y $\beta = 6$, es claro que $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}$ y $\beta = \{y \in \mathbb{Q} : y < 6\}$, luego, $\alpha \cdot \beta = 2 \cdot 6 = \{x \cdot y \in \mathbb{Q} : x \cdot y < 2 \cdot 6\}$. Por tanto, $2 \cdot 6 = 12$.

En el conjunto de los números reales, la adición y el producto satisfacen las propiedades que se enuncian a continuación.

Propiedad 1

1. El elemento neutro para la adición es 0 y para la multiplicación es 1. Esto es $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ y $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = 1$.
2. Si a es un número real, su inverso para la adición es $-a$, luego se cumple que $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$.
3. Si α es un número real, su inverso para la adición es $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$, luego se cumple que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$, excepto para $\alpha = 0$.

Propiedad 2

Si α, β y δ son números reales:

4. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
5. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
6. $\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$.
7. $\alpha \cdot (\beta \cdot \delta) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \delta$.
8. Si $\alpha + \beta = \alpha + \delta$, entonces $\beta = \delta$.
9. Si $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \delta$, entonces $\beta = \delta$.
10. Si $\alpha = \beta$, entonces $\alpha + \delta = \beta + \delta$.
11. Si $\alpha = \beta$, entonces $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \delta$.
12. $\alpha \cdot (\beta + \delta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta$.

Se le conoce como propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

Propiedad 3

Si α y β son números reales:

1. $\alpha \cdot 0 = 0$.

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

2. $-(-\alpha) = \alpha$.
3. $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$.
4. $-(\alpha + \beta) = -\alpha + (-\beta)$.
5. $-(\alpha \cdot \beta) = -\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (-\beta)$.
6. $(\alpha \cdot \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$ siempre que $\alpha, \beta \neq 0$.
7. Si $\alpha \cdot \beta = 0$, entonces $\alpha = 0$, o $\beta = 0$.

Propiedad 4

Si α y β son números reales, se dice que $\alpha < \beta$ si existe un número real positivo θ tal que $\beta = \alpha + \theta$.

De la propiedad 4, se deduce que $4 < 10$, porque $10 = 4 + 6$.

La proposición $-5 < -10$ es falsa, puesto que no existe ningún número real positivo θ tal que $-10 = -5 + \theta$.

Orden entre números reales

En relación con el orden entre números reales, se cumplen las condiciones:

Sean α, β y δ números reales, see tiene que

1. Si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$, entonces $\alpha = \beta$.
2. Si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \delta$, entonces $\alpha \leq \delta$.
3. Para todo α, β, se cumple que $\alpha \leq \beta$, o $\beta \leq \alpha$.
4. Sí $\alpha \leq \beta$, entonces $\alpha + \delta \leq \beta + \delta$.
5. Si $\alpha \leq \beta$ y $\delta \geq 0$, entonces $\alpha \cdot \delta \leq \beta \cdot \delta$.
6. Sí $\alpha \leq \beta$ y $\delta \leq 0$, entonces $\alpha \cdot \delta \geq \beta \cdot \delta$.

Potencias de un número real

Obsérvese la figura 2.14.

Exponente

$\nearrow$

$4^3 = 64 \rightarrow$ Potencia

$\downarrow$

Base

Figura 2.14. Términos de la potenciación.

Al elevar un número real α a un exponente n, se está calculando la potencia correspondiente p.

Definición 2.7. *Potencias racionales positivas de un número real*

Sea a un número real y $\frac{b}{c}$ un número racional. Entonces $a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$.

Se puede observar que toda raíz n-ésima de un número real se puede expresar como una potencia con un exponente racional.

Ejemplos

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^1} =,$$
$$-8^{\frac{2}{3}} = -\sqrt[3]{64} = -4$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt[5]{\frac{9}{16}}.$$

$\left(-\frac{6}{11}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(-\frac{6}{11}\right)^3} = \sqrt[4]{-\frac{216}{1331}}$ no es un número real, puesto que no existe ningún número real que al ser multiplicado por sí mismo un número par de veces, dé como resultado una potencia negativa.

Definición 2.8. *Potencias racionales negativas de un número real*

Sea α un número real y $\frac{b}{c}$ un número racional. Entonces $\frac{b}{c} = \frac{1}{a^{\frac{b}{c}}}$.

Ejemplos

$$8^{-4} = \frac{1}{8}^{4} = \frac{1}{4096}$$
$$\left(-\frac{2}{5}\right)^{-5} = \frac{1}{-\frac{2}{5}}^{5} = \frac{1}{-\frac{32}{3125}} = -\frac{3125}{32}$$
$$-5^{-\frac{2}{7}} = \frac{1}{-5^{\frac{2}{7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{5^2}} = -\frac{1}{\sqrt[75]{5^2}} = \frac{1}{\sqrt[7]{25}}$$
$$\left(\frac{10}{13}\right)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{10}{13}\right)^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\left(\frac{10}{13}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{\left(\frac{10000}{28561}\right)}}$$

Proposición 2.1. *Sean α y β números reales, y m y n números racionales, entonces:*

1. $\alpha^{\mathrm{m}} \cdot \alpha^n = \alpha^{\mathrm{m}-n}$.
2. $\frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \alpha^{m-n}$.
3. $(\alpha \cdot \beta)^m \;\; \alpha^m \cdot \beta^m$.
4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m = \frac{\alpha^m}{\beta^m}$.
5. $(\alpha^m)^n = \alpha^{m \cdot n}$.

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

A continuación, se presentan algunos ejemplos en los que se utilizan los resultados de la proposición 2.1 para hacer algunos cálculos.

Ejemplo

Calcular $\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[6]{7}$.

Por la definición 2.4, se tiene que $\sqrt[7]{7} = 7^{\frac{1}{5}}$ y $\sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{6}}$. Por tanto, por la parte 1) de la proposición 2.1,

$$\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} = 7^{\frac{11}{30}} = \sqrt[30]{7^{11}}$$

Ejemplo

Calcular $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$.

Nuevamente, por la definición 2.4, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{1}{2}}}$.

Luego, por la parte 4 de la proposición 2.1,

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2}{8}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Al simplificar el paréntesis (no siempre será posible hacerlo), se obtiene que

$$\left(\frac{2}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$\sqrt{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2}.$$

En ocasiones, resulta especialmente útil escribir un número real en forma de fracción cuyo denominador sea una raíz no exacta, en una fracción tal que el denominador sea un número racional. A este proceso se le conoce como **racionalización.**

Para llevar a cabo esa forma de escritura, se multiplica tanto el numerador como el denominador del número real por cierta potencia del denominador (en realidad multiplicamos por 1), de forma tal que se obtenga un número racional en el denominador.

Ejemplo

Racionalizar el número real $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

En este caso particular, tenemos que $\frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5^{\frac{1}{2}}}$. Luego, basta con multiplicar a $5^{\frac{1}{2}}$ por $5^{\frac{1}{2}}$ para que, al sumar los exponentes, el resultado sea una potencia entera de 5. Después, multiplicando tanto el numerador como el denominador del número real $\frac{8}{\sqrt{5}}$ por $5^{\frac{1}{2}}$, se tiene que

$$\frac{8}{5^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{8 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}+5^{\frac{1}{2}}}} = \frac{8 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{2}{2}}} = \frac{8 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

Ejemplo

Racionalizar el número real $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{10}}$.

En forma de potencias, tenemos que $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{6^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{3}}}$. Luego, es necesario multiplicar tanto el numerador como el denominador del número real por $10^{\frac{2}{3}}$, dado que, al adelantarnos un poco en el proceso, resulta que $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$. Entonces,

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{6^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{10^{\frac{2}{3}}}{10^{\frac{2}{3}}} = \frac{6^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{2}{3}}}{10^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{6^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{2}{3}}}{10^{\frac{3}{3}}} = \frac{6^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{2}{3}}}{10} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{10^2}}{10^{\frac{3}{3}}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{10^2}}{10} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{100}}{10}$$

Nótese que el producto $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{100}$ no se puede simplificar, puesto que no se puede aplicar ninguna de las propiedades enunciadas en la proposición 2.1.

No todos los números reales en forma fraccionaria constan de un único término en su denominador. Por ejemplo, el número real $\frac{5}{\sqrt{6+1}}$ tiene por denominador a $\sqrt{6}+1$, el cual no se puede simplificar, puesto que no se le puede aplicar propiedad alguna de la proposición 2.1. Cuando esto sucede, conviene multiplicar por otro número real, conocido como el **conjugado** del número real dado tal que su producto es otro número real sin radical.

Definición 2.9. *Conjugado de un número real de la forma* $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$

Sea un número real irracional tal que El conjugado de $\gamma=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ *, escrito* γ*, es otro número real* $\overline{\gamma}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

Análogamente, si $\vartheta = \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ *, su conjugado es* $\overline{\vartheta} = \sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$.

Nótese que el producto $\gamma \cdot \overline{\gamma}$ es

$$\gamma \,.\, \overline{\gamma} = (\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})\,.(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$$

Al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición, se tiene que

$$\gamma \,.\, \overline{\gamma} = (\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})\,.\,(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}) = \sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta}\,.\,\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\,.\,\sqrt{\beta}$$

Luego,

$$\gamma \cdot \overline{\gamma} = (\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})\cdot(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}) = \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} + \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \beta^{\frac{1}{2}} - \beta^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} - \beta^{\frac{1}{2}} \cdot \beta^{\frac{1}{2}},$$
$$\gamma \cdot \overline{\gamma} = (\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})\cdot(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}) = \alpha^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \beta^{\frac{1}{2}} - \beta^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} - \beta^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}.$$

Nótese que $\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \beta^{\frac{1}{2}} - \beta^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} = 0$, puesto que esta diferencia no es otra cosa que la resta del mismo número real. Por tanto,

$$\gamma \cdot \overline{\gamma} = (\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})\cdot(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}) = \alpha^{\frac{2}{2}} - \beta^{\frac{2}{2}} = \alpha - \beta$$

De este modo, por ejemplo, el conjugado del número real $\frac{5}{\sqrt{6}+1}$ es

$$\frac{5}{\sqrt{6}+1}\cdot\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}-1}=\frac{5\cdot\sqrt{6}-5}{6-1}=\frac{5\cdot\sqrt{6}-5}{5}$$

Para este caso particular, es posible simplificar los 5 que aparecen tanto en el numerador como el denominador del número real y, en consecuencia,

$$\frac{5}{\sqrt{6}+1}=\frac{5\cdot\sqrt{6}-5}{5}=\frac{5(\sqrt{6}-1)}{5}=\sqrt{6}-1$$

Productos notables

1. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2$. En efecto, por la propiedad 1, $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$, al aplicar la propiedad distributiva, resulta que $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha+\beta^2=\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2$. El estudiante puede utilizar este mismo recurso para calcular otras potencias de $\alpha+\beta$.
2. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2$. Este número real se obtiene de manera similar al anterior, aplicando propiedades de las potencias de números reales.
3. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$. Al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición, se obtiene que $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha+\beta^2=\alpha^2-\beta^2$.
4. $\alpha^2+\beta^2$ no se puede expresar como el producto de dos números reales (distintos de 1 o -1).
5. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)$. Requiere verificación por parte del estudiante.
6. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2)$. Requiere verificación por parte del estudiante.
7. $\alpha^4-\beta^4=(\alpha-\beta)(\alpha^3+\alpha^2\cdot\beta+\alpha\cdot\beta^2+\beta^2)$. Requiere verificación por parte del estudiante.
8. $\alpha^4+\beta^4$ no se puede expresar como el producto de dos números reales (distintos de 1 o -1).
9. Para todo $n\in\mathbb{N}$, $\alpha^n-\beta^n=(\alpha-\beta)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\cdot\beta+\alpha^{n-3}\cdot\beta^2+\cdots+\alpha\cdot\beta^{n-2}+\beta^{n-1})$. Requiere verificación por parte del estudiante, tomando algunos valores para n.
10. Para todo número impar $n\in\mathbb{N}$, $\alpha^n+\beta^n=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}-\alpha^{n-2}\cdot\beta+\alpha^{n-3}\cdot\beta^2-\cdots-\alpha\cdot\beta^{n-2}+\beta^{n-1})$. Requiere verificación por parte del estudiante, eligiendo valores impares de n.

Los productos notables son números reales. Su uso depende exclusivamente de la situación en la cual se requiere su uso. Por ejemplo, el conjugado del número real $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}$ se puede calcular utilizando la propiedad 5 o su generalización expuesta en la propiedad 9:

Se puede deducir que en la propiedad , α es la raíz cúbica de $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta^2)$ y es la raíz cúbica de . Por tanto, el conjugado de es . De este modo,

$$(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6})((\sqrt[3]{4})^2+\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}+(\sqrt[3]{6})^2)=(\sqrt[3]{4})^3-(\sqrt[3]{6})^3.$$

Al escribir los productos $((\sqrt[3]{4})^2+\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}+(\sqrt[3]{6})^2)$ y $(\sqrt[3]{4})^3-(\sqrt[3]{6})^3$ como potencias, tenemos que

$$(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6})((4^{\frac{1}{3}})^2+4^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{1}{3}}+(6^{\frac{1}{3}})^2)=(4^{\frac{1}{3}})^3-(6^{\frac{1}{3}})^3.$$

Luego, aplicando las propiedades 3 y 5 de la proposición 2.1,se obtiene

$$(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6})\left(4^{\frac{2}{3}}+(4\cdot 6)^{\frac{1}{3}}+4\frac{2}{3}\right)=4^{\frac{3}{3}}-6^{\frac{3}{3}}.$$

Finalmente, se tienen los números reales $4^{\frac{2}{3}},(4\cdot 6)^{\frac{1}{3}}$ y $4^{\frac{2}{3}}$ como raíces. De lo cual resulta que

$$(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6})(\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{6^2})=4-6=-2.$$

Nótese que $(\sqrt[3]{4})^2=\sqrt[3]{4^2}$. De manera similar, $\sqrt[3]{6})^2=(\sqrt[3]{6})$. Por otra parte, $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{24}$. Estas conclusiones son deducibles de las propiedades de las potencias de números reales dadas en la proposición 2.1.

El algoritmo de la división y las fracciones continuas

En la sección 1.3 se usó el algoritmo de la división para dar significado a conceptos de la aritmética modular. En esta sección, se aborda el mismo algoritmo, el cual, permitirá visualizar algunas herramientas conceptuales asociadas a la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad.

Medir un segmento L mediante un segmento l, es tomar a l como unidad de medida [5]. Pueden ocurrir las siguientes situaciones: l cabe exactamente un número de veces en L y en tal caso, $nl = L$ para cierto valor de n. Puede ocurrir también que l esté contenido cierto número de veces en L, pero puede sobrar un residuo r. Para esta situación, se tiene que $L = ml + r$, para algún m número natural. Si hay conmensurabilidad, entonces la medida común para L y l también lo será para l y r.

Si en la relación anterior $r = r_1$ no divide exactamente a l, se cumple que $l = m_2 r_1 + r_2$. Realizando este proceso de forma reiterada, se obtienen las siguientes relaciones:

$$L = m_1 l + r_1, \text{ con } ; 0 < r_1 < l;$$

$$L = m_2 r_1 + r_2, \text{ con } ; 0 < r_2 < r_1;$$

$$L = m_3 r_2 + r_3, \text{ con } ; 0 < r_3 < r_2;$$

$$L = m_4 r_3 + r_4, \text{ con } ; 0 < r_4 < r_3;$$

$$\ldots$$

$$r_{n-2} = m_n r_{n-1} + r_n, \text{ con } ; 0 < r_n < r_{n-1}.$$

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Finalmente, se obtiene que

$$r_{n-1} = m_{n+1} r_n + 0 .$$

Se concluye, por tanto, que existe un residuo 0, al considerar la cadena de desigualdades:

$$l > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > r_5 > r_6 > \cdots > 0.$$

La medida común buscada, es el máximo común divisor de los números L y l. De acuerdo con lo anteriormente señalado, este valor es r_n .

Este el procedimiento para buscar la medida común de dos magnitudes dadas y recibe el nombre de **algoritmo de Euclides,** el cual permite representar el cociente de dos números naturales mediante una fracción continua simple finita. Veamos un ejemplo con $r_5 > 5$.

En tal caso,

$$L = m_1 l + r_1,$$

$$l > m_2 r_1 + \mathrm{r}_2,$$

$$r_1 > m_3 r_2 + \mathrm{r}_3,$$

$$r_2 > m_4 r_3 + \mathrm{r}_4,$$

$$r_3 > m_5 r_4 .$$

De ahí, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\frac{L}{l} = m_1 + \frac{r_1}{l} = m_1 + \frac{1}{\left(\frac{l}{r_1}\right)},$$

$$\frac{l}{r_1} = m_2 + \frac{r_2}{r_1} = m_2 + \frac{1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)},$$

$$\frac{r_1}{r_2} = m_3 + \frac{r_3}{r_2} = m_3 + \frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_3}\right)},$$

$$\frac{r_2}{r_3} = m_4 + \frac{r_4}{r_3} = m_4 + \frac{1}{\left(\frac{r_3}{r_4}\right)},$$

$$\frac{r_3}{r_4} = m_5 + \frac{r_5}{r_4} = m_5 .$$

De estas relaciones, resulta que

$$\frac{L}{l}=m_1+\frac{1}{\left(\frac{l}{r_1}\right)}=m_1+\frac{1}{\left(m_2+\frac{1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\right)}=m_1+\frac{1}{m_2+\frac{1}{\left(m_3+\frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_3}\right)}\right)}}$$

$$=m_1+\frac{1}{m_2+\frac{1}{m_3+\frac{1}{\left(m_4+\frac{1}{\left(\frac{r_3}{r_4}\right)}\right)}}}=m_1+\frac{1}{m_2+\frac{1}{m_3+\frac{1}{m4+\frac{1}{m_5}}}}.$$

Las fracciones continuas simples se notan mediante la expresión $[m_1; m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n]$ siempre que correspondan a un número racional.

Ejemplo

Hallar la representación fraccionaria del número racional asociado a la fracción continua simple [3; 4, 6, 2, 5].

Se tiene que el número racional asociado es de la forma

$$3+\frac{1}{4+\frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{1}{5}}}}.$$

Se puede calcular el número racional asociado iniciando las operaciones con fracciones desde la parte inferior:

$$3+\frac{1}{4+\frac{1}{6+\frac{1}{\frac{11}{5}}}}=3+\frac{1}{4+\frac{1}{6+\frac{5}{11}}}=3+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{71}{5}}}$$

$$=3+\frac{1}{4+\frac{5}{71}}=3+\frac{1}{\frac{289}{71}}=3+\frac{71}{289}=\frac{938}{289}.$$

Ejemplo

Encontrar la fracción continua simple asociada al número racional $\frac{72}{15}$.

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

Basta con observar que 72 = 4 · 15 + 12. Por tanto,

$$x = 4 + \frac{12}{15},$$

$$x = 4 + \frac{1}{\frac{15}{12}}.$$

Como 15 = 1 ·12 + 3, entonces:

$$x = 4 + \frac{1}{1+\frac{3}{12}} = 4 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{12}{3}}} = 4 + \frac{1}{1+\frac{1}{4}}.$$

En consecuencia, $7\frac{2}{15} = [4;1,4]$..

Proposición 2.2. *Toda fracción continua simple finita representa un número racional.*

Dos números naturales cualesquiera pueden representarse por medio de una fracción continua simple finita del mayor al menor de ellos. Si dos magnitudes tienen medida racional, el algoritmo de Euclides permite encontrar la medida común [5]. Pero una fracción continua no representa siempre la razón entre dos números naturales, lo cual puede ocurrir cuando el proceso nunca termina, es decir, cuando ninguno de los residuos es 0. Las magnitudes en este caso son inconmensurables y, por tanto, no tienen medida común.

Ejemplo de ello es la división en media y extrema razón. Es bien sabido que si $a + b$ es el todo, con b la parte mayor, entonces:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}.$$

De esta expresión, se deduce que $a\,(a + b) = b^2$, usando proporciones, y, por tanto,

$$a\,(a + b) = b^2.$$

$a^2 + ab = b^2$ la, aplicando la propiedad distributiva.

$a^2 + ab - b^2 = b^2 - b^2$, restando b^2 en ambos lados de la igualdad.

Finalmente, se obtiene que

$$a^2 - ab - b^2 = 0.$$

Por la ecuación de segundo grado, atribuida a los árabes, la solución de la expresión $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$ y b la incógnita, es

$$\frac{-b \pm \sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto,

$$b = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)a.$$

Y, en tal caso,

$$\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Este número se conoce como **número áureo**.

Se puede obtener entonces una fracción continua simple:

Dado que $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$, se tiene que $b^2 + ab + a^2$. De modo que al dividir por b en ambos lados del igual:

$$\frac{b^2}{b} = \frac{ab+a^2}{b},$$

$$b = a + \frac{a^2}{b}.$$

Este proceso se repite indefinidamente, puesto que

$$b = a + \cfrac{a^2}{a + \cfrac{a^2}{a + \cfrac{a^2}{a + \cfrac{a^2}{a + \cfrac{a^2}{\ddots}}}}}$$

Como $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, tomando $a = 1$, se obtiene que

$$b = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Expresión que corresponde al número áureo como fracción continua.

Proposición 2.3. *Toda fracción continua simple infinita representa un número irracional.*

En efecto, al escribir la fracción continua simple infinita asociada a $\sqrt{2}$, se sabe que $\sqrt{2}$ es un número real entre 0 y 1. Por tanto, $m_1 = 1$ y, en consecuencia, la fracción continua de $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$.

Luego, restando 1 en ambos lados de la igualdad, se obtiene que

$\sqrt{2} - 1 + \frac{1}{x}$.

Multiplicando por x en ambos lados de la igualdad,

$$x(\sqrt{2}-1) = x \cdot \frac{1}{x} = 1;$$

y luego por el inverso de $\sqrt{2}-1$ en ambos lados de la igualdad, resulta que

$$x(\sqrt{2}-1)=x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}-1}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Se concluye, por tanto, afirmando que

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Puesto que el denominador del número real x es un número irracional, al multiplicar por su conjugado, de tal modo que el denominador sea un número racional, se tiene que

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1.$$

Como $\sqrt{2}=1+\frac{1}{x}$, al sustituir x por , resulta que $x=\sqrt{2}+1$

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

De tal manera, se tiene que $m_2=\sqrt{2}+1$, y se sabe que $\sqrt{2}+1$ es un número entre 2 y 3. En consecuencia, $\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{y}$ para algún número real y. Luego, se debe calcular el número real y. Para ello, se resta 2 en ambos lados de la igualdad, con lo cual se obtiene la expresión

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{y}.$$

En consecuencia, $y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, lo cual permite concluir que $y=x$.

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}}.$$

Sin embargo, se sabe que $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ y, por tanto,

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}}=\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}.$$

Como $\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{x}$, este proceso continúa de manera indefinida y se concluye que

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}.$$

Así que $\sqrt{2}=[1;2,2,2,2,2,...]$.

Los pitagóricos conocían las fracciones continuas. Tuvieron la idea de conmensurabilidad que descubrieron por relaciones entre números. Aunque la unidad debería ser común para todos los números, no les fue posible encontrar una medida común para todas las magnitudes.

Para los pitagóricos, los números eran naturales; los racionales eran relaciones entre los verdaderos números. Está casi fuera de duda que fueron los pitagóricos los primeros en encontrar números irracionales y, ante todo, tener consciencia de ello. No obstante, hay indicios de que en la India se descubrió el primer irracional, dado que

a. conocían como inexactos algunos valores encontrados por medición directa o por cálculos basados en ellos, y

b. tenían la convicción de que es imposible obtener siempre una expresión aritmética exacta de un valor.

En algunas fuentes asociadas con la matemática desarrollada en la India, figura como valor de $\sqrt{2}$ el siguiente:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}-\frac{1}{408}.$$

Aunque no se tienen referencias de que se trate de un valor aproximado.

Consideraciones sobre las operaciones con números reales

Si α y β son números reales:

1. Si α y β son números racionales, $\alpha+\beta$ es un número racional.
2. Si α y β son números racionales, $\alpha\cdot\beta$ es un número racional.
3. Si α y β son números irracionales, $\alpha+\beta$ puede ser racional o irracional.
4. Si αy β son números irracionales, $\alpha\cdot\beta$ puede ser racional o irracional.
5. Si α es un número racional y β es irracional, $\alpha+\beta$ es irracional.
6. Si α es un número racional y β es irracional, $\alpha\cdot\beta$ es irracional, siempre que $\alpha \neq 0$.

Las consideraciones 1 y 2 son consecuencia de la construcción de los números racionales que se realizó en el capítulo 1.

Respecto la consideración 3, se observa que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es un número irracional. La prueba se puede llevar a cabo de forma similar a la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Sin embargo, haciendo uso de expresiones decimales, se sabe que el número real $\alpha =$ 0,0100100010000100000l… es irracional, pues no es infinito periódico, al igual que el número real $\beta = 0{,}1011011101111011111 0\ldots$

La suma $\alpha+\beta$, cifra por cifra, será $\alpha+\beta = 0{,}1111111111111111111\ldots = 0{,}\overline{1} = \frac{1}{9}$, que es un número racional.

En lo que respecta la consideración 4, es claro que, si $\alpha = \sqrt{2}$ y $\beta = \sqrt{3}$ el número real $\alpha \cdot \beta = \sqrt{6}$ es un número irracional (el estudiante puede realizar la prueba para confirmarlo); mientras que, si $\sqrt{2}$ y $\beta = \frac{1}{\sqrt{8}}$, el número real $\alpha \cdot \beta = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ es un número racional.

Un poco de práctica eligiendo algunos números tanto racionales como irracionales, convencerá al estudiante de las afirmaciones dadas.

Respecto a las consideraciones 5 y 6, el ejercicio de verificación es un tanto más complejo. Se pueden elegir números tales como $\alpha = \frac{2}{3}$ y $\beta = \sqrt{3}$, con α racional y β irracional. Es claro que $\alpha + \beta = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2+3\sqrt{3}}{3}$ es un número irracional. Basta con probar que $2+3\sqrt{3}$, en efecto, lo es. Por otra parte, $\alpha \cdot \beta = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ es también irracional. Nótese que si $\alpha = 0$ y $\beta = \sqrt{3}$, entonces $\alpha \,.\, \beta = 0 \cdot \sqrt{3}$,es un número racional.

Intervalos y entornos de números reales

Sean α y β dos números reales, tales que $\alpha \leq \beta$.

DEFINICIÓN 2.10. *Un intervalo cerrado de extremos* α y β, *escrito* $[\alpha, \beta]$, *es el conjunto de números reales que cumplen la siguiente condición:*

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R}\colon \alpha \leq x \leq \beta\}.$$

Observemos que los números reales $0, \frac{2}{5}, \sqrt{2}, \frac{4}{3}, \sqrt[3]{7} \in [0,2]$, pero los números $-1, -\frac{3}{5}, \sqrt[3]{9}, 5 \notin [0,2]$. En el intervalo cerrado [0,2] se encuentran todos los números reales menores o iguales a 2 pero mayores o iguales a 0. Por esta razón, tanto 0 como 2, están en el intervalo dado.

DEFINICIÓN 2.11. *Un intervalo abierto de extremos* α *y* β, *escrito es el conjunto de números reales que cumple la siguiente condición:*

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}\colon \alpha < \beta\, x < \beta\}$$

El estudiante puede notar la diferencia entre intervalo abierto y cerrado. Básicamente, en el abierto, sus extremos no pertenecen al conjunto; mientras que en el cerrado sí. De forma análoga, se definen a continuación los intervalos semiabierto y semicerrado

DEFINICIÓN 2.12. *Los intervalos semiabiertos y semicerrados de extremos* α *y* β *son tales que* $(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R}\colon \alpha < x \leq \beta\}$, $(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R}\colon \alpha \leq x < \beta\}$.

Las definiciones 2.10, 2.11 y 2.12 corresponden a intervalos acotados inferior y superiormente por α y β respectivamente. De forma natural, es posible definir intervalos no acotados, es decir, que no tienen cotas superiores o inferiores.

Definición 2.13. Sea α un número real. Entonces,

$$(\alpha,\ \infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon x > a\},$$

$$[\alpha,\ \infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq a\},$$

$$(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}\colon x < a\},$$

$$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq a\}.$$

El intervalo abierto $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Se puede notar que el conjunto de los números reales positivos es equivalente al intervalo no acotado superiormente $(0, \infty) = \mathbb{R}^{+}$. Análogamente, el conjunto de los números reales negativos se representa como $(0, \infty) = \mathbb{R}-$.

Para indicar el conjunto de todos los números reales x que satisfacen la desigualdad $x \leq -6$, utilizamos el intervalo semiabierto $(-\infty, -6]$ y escribimos $x \in (-\infty, -6]$.

Definición 2.14. *Sea un número real. Todo intervalo abierto* $(\alpha - r, \alpha + r)$ *donde* $r > 0$ *se llama entorno con centro y radio . Un entorno también suele representarse mediante el símbolo* $N_r(\alpha)$.

El entorno $N_3(7)$ es el intervalo $(7 - 3,7 + 3) = (4,10)$, luego todos los números reales comprendidos entre 4 y 10 están en el entorno dado.

Análogamente, dado un intervalo abierto, por ejemplo $(-6,5)$, se puede escribir en forma de entorno. El centro del intervalo α se calcula mediante la media aritmética de ambos extremos del intervalo dado. Entonces,

$$\alpha = \frac{-6+5}{2} = \frac{-1}{2} = -0,5.$$

De este modo, el centro del entorno es 0,5 y conocidos ambos extremos del intervalo dado al inicio, es posible determinar el radio del entorno así:

El extremo superior del intervalo es 5. Por tanto, $\alpha + r = 5$. Como $\alpha = -0,5$, se tiene que $-0,5 + r = 5$ y, en consecuencia, $r = 5,5$. Este mismo valor se debe calcular si se utiliza el extremo inferior del intervalo en lugar del superior:

$$\alpha - r = -6,$$
$$-0,5 - r = -6,$$
$$-r = -5,5.$$

Y, por tanto, $r = 5,5$, de modo que el entorno que se pretendía calcular es $N_{5,5}(-0,5)$. Nótese que el radio siempre es positivo por tratarse de una distancia entre dos números reales.

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

REFERENCIAS

[1] K. Morris, *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días*, Madrid: Alianza, 2012.

[2] F. Terigi y S. Wolman, «Sistemas de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza», *Revista Iberoamericana de educación,* n.º 43, pp. 59-83, 2007.

[3] A. Pérez, «Lógica, conjuntos, relaciones y funciones», *Pubicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana,* vol. 12, pp. 51-55, 2010.

[4] B. Guerrero, «Sobre la axiomatización en matemáticas», *Boletín de Matemáticas,* vol. 11, n.º 1, pp. 79-94, 2004.

[5] A. Campos Sánchez, *Introducción a la lógica y geometría griegas anteriores a Euclides*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 1994.

[6] H. Ulrich, «Euclidian geometry in terms of automata theory», *Theoretical Computer Science,* vol. 68, n.º 1, pp. 71-87, 1989.

[7] A. S. Smogorzhevski, *Acerca de la geometría de Lobachevski*, Moscú: MIR, 1978.

[8] R. Mendelsohn, *The philosophy of Gottlob Frege*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005.

[9] B. Russell, *The principles of mathematics*, New York: W.W. Norton, 1996.

[10] C. J. Luque, «El concepto de número natural según Giussepe Peano», en *Memorias XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética*, Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2002, pp. 45-85.

[11] I. García-Martínez y M. Parraguez, «The basis step in the construction of the principle of mathematical induction based on APOS theory», *Journal of Mathematical Behavior,* vol. 46, pp. 128-143, jun. 2017.

[12] A. Gomes, E. da Costa y R. dos Santos, «Números perfeitos e primos de Mersenne», *Revista da Olimpiada,* vol. 7, pp. 99-111, 2008.

[13] A. Gallardo y E. Basurto, «La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 13, n.º 4-II, pp. 255-268, dic. 2010.

[14] X. Vamvakoussi, «The development of rational number knowledge: old topic, new insights», *Learning and Instruction,* vol. 37, pp. 50-55, jun. 2015.

[15] C. Vasco, «El archipiélago fraccionario», *Notas de Matemática (Universidad Nacional de Colombia),* n.º 31, pp. 1-33, 1991.

[16] E. A. Guacaneme Suárez, «Teoría euclidiana de la proporción en la consrucción de los numéros reales: ¿un asunto útil para un profesor? », *Tecné, Episteme y Didaxis,* n.º 31, pp. 113-131, 2012.

[17] L. Corry, «La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind», *Mathesis,* vol. 10, n.º 1, pp. 1-24, febrero 1994.

[18] M. Hill, «Presidential address on the theory of proportion,» *The Mathematical Gazette,* vol. 6, n.º 100, pp. 360-369, 1912.

[19] H. B. Fine, «Ratio, proportion and measurement in the Elements of Euclid», *The Annals of Mathematics,* vol. 19, n.º 1, pp. 70-76, 1976.

[20] T. L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements*, New York: Courier, 1959.

[21] Euclides, *Elementos. Libros V-IX*, Madrid: Gredos, 1994.

[22] F. Zubieta, «La definición de proporción de Eudoxio», *Mathesis,* vol. 7, pp. 477-486, 1991.

[23] C. Ramírez, «Análisis argumental del diálogo Menón», *Sincronía,* n.º 63, pp. 1-13, 2013.

[24] Platón, «Menón o de la virtud», de *Obras completas de Platón,* tomo 4, P. de Azcárate, editor, Madrid, Medina y Navarro, 1871, pp. 283-345.

[25] G. García Murillo, «Hípaso de Metaponto: traducción, exposición y comentario de sus ideas», [en línea]. Disponible: https://inif.ucr.ac.cr/wp-content/uploads/2022/05/Vol.%20VII/No.24/Hipaso%20de%20Metaponto%20Traducci%C3%B3n.%20exposici%C3%B3n%20y%20an%C3%A1lisis%20de%20sus%20ideas..pdf. [Acceso: 15 de sept. 2021].

[26] A. Oller y J. Gairín, «La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 16, n.º 3, pp. 317-338, nov. 2013.

[27] R. De Castro y G. Rubiano, «Extendiendo la construcción de Dedekind», en *Memorias XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética*, Bogotá, 2002.

[28] R. Dedekind, «Números irracionales», en *Sigma: el mundo de las matemáticas*, 10.ª ed., vol. 4, Madrid, Grijalbo, 1968, pp. 119-128.

[29] M. Falk de Losada, *Corrientes de pensamiento matemático del siglo XXI. Primera parte: Fundamentación*, Bogotá: Universidad Antonio Nariño, 2012.

LISTA DE FIGURAS

 https://doi.org/10.26620/uniminuto/978-958-763-619-2

LISTA DE TABLAS

Números reales para ingeniería es una obra que surge como respuesta a las dificultades que presentan los estudiantes de los distintos programas de ingeniería al iniciar los distintos cursos de matemática en educación superior. Es el resultado de una investigación fundamentada en un enfoque cualitativo, que recopiló suficiente información para la elaboración de un libro que le permita al lector comprender las propiedades de los números reales y aplicarlas de manera argumentativa, sólida y eficiente en la solución de múltiples problemas que se le presentarán en su labor profesional.

UNIMINUTO
Corporación Universitaria Minuto de Dios
Educación de calidad al alcance de todos
Sede Cundinamarca

Bogotá D.C. Calle 81B No. 72B - 70
Teléfono +(57)1 - 291 6520
www.uniminuto.edu