UNIMINUTO
Corporación Universitaria Minuto de Dios
1992 - 2012 • Cambiando vidas
20 años

Matemáticas Básicas en Contextos Empresariales

Clara Yaneth Puentes Cepeda
Diana Shirley Velásquez Rojas

9 780201 379624

UNIMINUTO
Corporación Universitaria Minuto de Dios
1992 - 2012 • Cambiando vidas
20 años

Puentes Cepeda, Clara Yaneth
Matemática Universidad Nacional de Colombia

Velásquez Rojas, Diana Shirley
Matemática Universidad Nacional de Colombia

Primera edición, 2012
ISBN: 978-958-763-046-6

Revisión Técnica
O'bonaga Garnica, Edgar

Diseño de Portada
Jaramillo Rodríguez, Yessica Julieth
Comunicadora Gráfica DCSP
UNIMINUTO

Corrección de estilo
Flechas Garzón, Claudia Jazmín

Impreso por Corporación Universitaria Minuto de Dios.
Impreso en Colombia – Printed in Colombia
Bogotá D.C.

Agradecimientos:
Al ingeniero Néstor Hugo Monroy
y a la magister Sara Ofelia Giraldo
por haber creído en la propuesta
y gestionado el proyecto.

Índice general

Introducción

Cotidianamente nos enfrentamos ante diversas situaciones que nos generan nuevos aprendizajes, los cuales, en algunos casos, modifican nuestra forma de pensar y actuar frente a determinados sucesos, ya sea porque se desarrollan habilidades y destrezas o porque se amplia nuestro conocimiento.

La forma como aprendemos depende muchas veces de nuestras aptitudes, cada quien, por decirlo de alguna manera,tiene un estilo particular por medio del cual se acerca al conocimiento, algunos prefieren lo visual, otros lo auditivo y hay quienes escogen lo táctil. Sin importar cuál sea el estilo, siempre que ampliamos nuestro conocimiento nos enfrentamos al desarrollo de competencias, que según sea el caso, podrán ser interpretativas, argumentativas y propositivas.

la lectura es uno de los métodos más utilizados en el proceso de aprendizaje que involucra todas las competencias mencionadas. Sin embargo, hoy en día, dentro de las técnicas de estudio es cada vez más escaso el uso de esta herramienta, ya sea porque no se tiene una cultura o porque algunas veces el lenguaje en que están expresados los libros es de difícil comprensión para el lector.

Actualmente existe una amplia bibliografía en todas las áreas del saber, pero sin duda, el lenguaje marca la diferencia a la hora de elegir un libro, suele suceder que cuando el lenguaje es cercano a nosotros sentimos más agrado en la lectura y la motivación aumenta.

Este libro, busca generar en el lector ese tipo de emociones. La matemática de por sí es un área por el cual las personas manifiestan diversas impresiones tanto positivas como negativas, las cuales repercuten no sólo a la hora de aprenderla sino también en el momento de comprender la lógica que de ella se deriva, y que con su estructura nos conduce al análisis y resolución de diversas situaciones problema.

Así mismo, se espera orientar al lector en su aprendizaje de la matemática presentando los conceptos en un lenguaje cercano, a través de contextos de la vida cotidiana que ayuden a responder interrogantes como por qué estudiar y para qué sirve la matemática.

El texto se elaboró basado en la experiencia de las autoras con diferentes grupos de estudiantes de la Corporación Universitaria Minuto de Dios - UNIMINUTO - y tiene dentro de sus finalidades responder a las necesidades que se evidencian en los procesos de aprendizaje de los mismos.

El libro se compone de seis capítulos cada uno dividido en tres partes así: **una sección teórica** en la cual se enmarcan los conceptos matemáticos más relevantes en un recuadro y el desarrollo de ejemplos, cuya solución se presenta paso a paso con los procesos que en ella intervienen; una sección llamada **Análisis de situaciones** que plantea varios problemas del contexto empresarial con su interpretación y respectiva solución, y una última sección denominada **Actividades de práctica** que busca afianzar los temas tratados.

Los contenidos temáticos comprenden lo referente a conjuntos numéricos, expresiones algebraicas, funciones junto con el concepto de límite y continuidad, derivada e integral, enfocados cada uno a la interpretación y resolución de situaciones problema.

Esperamos que el material sea motivador, útil y cumpla las expectativas de nuestros lectores.

Capítulo 1

Conjuntos numéricos y sus operaciones

En este capítulo estudiaremos los conjuntos numéricos y las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.

Por lo general, solemos realizar operaciones básicas sin analizar detalladamente el significado que tienen en una situación dada. En este capítulo estudiaremos la relevancia que tienen las operaciones en los conjuntos numéricos y la pertinencia de los resultados en diversos contextos, para así efectuar conjeturas y tomar decisiones.

1.1. Conjuntos numéricos

Los conjuntos numéricos que consideraremos en este texto son: los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales que se denotan con las letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^c$ y $\mathbb{R}$, respectivamente, y están constituidos de la siguiente manera.

El conjunto de los números naturales: esta constituido por los números que utilizamos para contar.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

El conjunto de los números enteros: esta conformado por los números naturales y sus opuestos, es decir, de signo contrario.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

El conjunto de los números racionales: lo constituyen todos los números que se pueden expresar como una fracción.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \left[\frac{a}{b}\right] : a, b \in \mathbb{Z} \text{y} b \neq 0 \right\}$$

Donde $\left[\frac{a}{b}\right]$ corresponde a la clase de las fracciones que son equivalentes a $\frac{a}{b}$.

Ejemplo

La clase del número racional $\dfrac{1}{4}$ es:

$$\left[\frac{1}{4}\right] = \left\{\ldots, \frac{-3}{-12}, \frac{-2}{-8}, \frac{-1}{-4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \ldots\right\}$$

Observemos que las fracciones que aparecen en $\left[\frac{1}{4}\right]$ son aquellas que se obtienen de amplificar $\dfrac{1}{4}$.

■

De otra parte, existen algunos números decimales que se pueden escribir como fracciones y por ello decimos que son números racionales; por ejemplo, $0,5$ es decimal y se puede expresar como $\frac{1}{2}$, por ende afirmamos que $0,5$ es un número racional, como muchos otros decimales.

Los números decimales se clasifican en **exactos**, **periódicos** y **no periódicos**. Los *decimales exactos* y los **periódicos** son números racionales.

Los números **decimales exactos** se distinguen por ser finitos (se terminan), por ejemplo:

2,45 123,9888 1,345

Mientras que los *decimales periódicos* se caracterizan porque después de la coma decimal se repite un mismo grupo de cifras infinitamente, algunos ejemplos son:

1,333333... 245,34545454... 0,124124124... 67,985367436743674...

Si observamos los anteriores números podemos notar que en el primero se repite infinitamente el dígito 3, en el segundo la cifra 45, en el tercero 124 y en el último o cuarto número la cifra 3674. A estas cifras se les conoce como el **período** del número.

Ahora presentaremos el proceso matemático que permite expresar números decimales, bien sean exactos o periódicos, como fracciones.

Decimales exactos

Antes de describir los pasos necesarios para expresar decimales exactos como fracción, presentaremos un ejemplo en el cual se observa con mayor claridad dicho proceso.

Ejemplo

Expresemos 1,25 como fracción.

Paso 1: denotamos el número con una letra cualquiera.

$$m = 1{,}25$$

Paso 2: multiplicamos el número por una potencia de diez, de tal modo que los decimales desaparezcan y el número resultante sea un entero.

$$\begin{aligned} m &= 1{,}25 && \text{Multiplicamos por } 10^2 \text{ ó 100 que es la potencia de 10} \\ & && \text{que permite correr dos dígitos en la parte decimal.} \\ 100m &= 100(1{,}25) && \text{Operamos.} \\ 100m &= 125 \end{aligned}$$

Paso 3: escribimos la fracción cuyo numerador es este número (o el del paso 2) y denominador es la misma potencia de diez encontrada.

$$\begin{aligned} 100m &= 125 \\ \frac{100m}{100} &= \frac{125}{100} && \text{Escribimos una fracción cuyo numerador es 125 y} \\ & && \text{denominador 100. En otras palabras dividimos} \\ & && \text{a ambos lados del igual entre 100.} \\ \frac{\cancel{100}m}{\cancel{100}} &= \frac{125}{100} && \text{Simplificamos.} \\ m &= \frac{125 \div 5}{100 \div 5} && \text{Sacamos quinta.} \\ &= \frac{25}{20} \\ &= \frac{25 \div 5}{20 \div 5} && \text{Sacamos quinta.} \\ m &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Con esto concluimos que 1,25 se expresa por medio de la fracción $\frac{5}{4}$.

■

Con base en lo anterior, los pasos generales para representar decimales exactos como fracciones son:

Paso 1: denotar el número con una letra.

Paso 2: multiplicar el número, del paso 1, por una potencia de diez de tal modo que los decimales desaparezcan y el número resultante sea un entero.

Paso 3: escribir la fracción cuyo numerador es el número resultante en el paso 2 y denominador es la misma potencia de diez encontrada.

Decimales periódicos

Análogamente al caso de los decimales exactos, expondremos un ejemplo que ilustre el proceso necesario para expresar decimales periódicos como fracciones. Veamos.

Ejemplo

Expresemos 1,333333... como fracción.

Paso 1: denotamos el número con una letra cualquiera.

$$a = 1{,}333333\ldots$$

Paso 2: como el período es 3 y aparece justo después de la coma decimal, multiplicamos por 10. Nótese que lo anterior se debe a que el período sólo tiene un dígito.

$$\begin{aligned} a &= 1{,}333333\ldots \\ 10a &= 10(1{,}333333\ldots) && \text{Multiplicamos por 10 que es la potencia de 10} \\ & && \text{que permite correr un dígito en la parte decimal.} \\ 10a &= 13{,}33333\ldots && \text{Operamos.} \end{aligned}$$

Paso 3: sustraemos aquellos números cuyo período es el mismo.

$$\begin{aligned} 10a &= 13{,}33333\ldots && \text{Como } a \text{ y } 10a \text{ tienen el mismo período,} \\ -a &= 1{,}33333\ldots && \text{sustraemos del mayor el menor.} \end{aligned}$$

$$\overline{}$$

$$9a = 12{,}00000\ldots$$

Paso 4: escribimos la fracción cuyo numerador es el número de la resta anterior y el denominador es la resta de las potencias de diez utilizadas en la sustracción.

$$\frac{9a}{9} = \frac{12}{9} \qquad \text{Escribimos una fracción cuyo numerador es 12 y denominador 9. En otras palabras, dividimos a ambos lados del igual entre 9.}$$

$$\frac{\cancel{9}a}{\cancel{9}} = \frac{12}{9} \qquad \text{Simplificamos.}$$

$$a = \frac{12 \div 3}{9 \div 3} \qquad \text{Simplificamos la expresión.}$$

$$a = \frac{4}{3}$$

Luego, expresamos $1{,}33333\ldots$ con la fracción $\frac{4}{3}$. ■

Ejemplo

Expresemos $21{,}32545454\ldots$ como fracción.

Paso 1: denotemos el número con una letra.

$$a = 21{,}32545454\ldots$$

Paso 2: como el período es 54 y aparecen dos números después de la coma decimal, multiplicamos por 100 para correr la coma hasta donde comienza el período.

$$a = 21{,}32545454\ldots$$
$$100a = 100(21{,}32545454\ldots) \qquad \text{Multiplicamos a lado y lado por 100.}$$
$$100a = 2132{,}545454\ldots \qquad \text{Operamos.}$$

Dado que nuestro objetivo es encontrar dos números cuyo período sea 54, para poder sustraer el mayor del menor y eliminar los números que se repiten después de la coma decimal, debemos multiplicar el número inicial por 10 000 que corre la coma decimal cuatro espacios, de tal modo que justo después del decimal comience el período.

$$a = 21{,}32545454\ldots$$
$$10\,000a = 10\,000(21{,}32545454\ldots) \qquad \text{Multiplicamos a lado y lado por 10 000}$$
$$10\,000a = 213\,254{,}545454\ldots \qquad \text{Operamos.}$$

Paso 3: sustraemos aquellos números cuyo período es el mismo.

$$\begin{array}{rl} 10\ 000a = & 213\ 254{,}545454\ldots \\ -100a = & 2\ 132{,}545454\ldots \\ \hline 9\ 900a = & 211\ 122{,}00000\ldots \end{array}$$

Como 10 000a y 100a tienen el mismo período, entonces sustraemos del mayor el menor.

Paso 4: escribimos la fracción cuyo numerador es la resta de los números con igual período y, el denominador es la resta de las potencias de diez, del paso anterior.

$$\frac{9\ 900a}{9\ 900} = \frac{211\ 122}{9\ 900}$$

Escribimos una fracción cuyo numerador es 211 122 y el denominador es 9 900. En otras palabras, dividimos a ambos lados del igual entre 9 900.

$$\frac{\cancel{9\ 900}a}{\cancel{9\ 900}} = \frac{211\ 122}{9\ 900}$$

Simplificamos.

$$a = \frac{211\ 122 \div 18}{9\ 900 \div 18}$$

Dividimos entre diez y ocho tanto el numerador como el denominador.

$$a = \frac{11\ 729}{550}$$

De este modo, expresamos 21,32545454... por medio de la fracción $\dfrac{11\ 729}{550}$.

■

Con base en lo anterior, los pasos generales para representar decimales periódicos como fracciones son:

Paso 1: denotar el número con una letra.

Paso 2: si el período del número comienza justo después de la coma decimal debemos multiplicar el número por una potencia de diez, de tal modo que se corra la coma tantos dígitos como tenga el período.

Si el período del número comienza algunos números después de la coma decimal, debemos multiplicar por una potencia de diez de tal manera que se corra la coma decimal el número de dígitos que no pertenecen al período. Luego, volvemos a multiplicar el número original por una potencia de diez que permita correr la coma decimal el número de dígitos que no pertenecen al período y el número de dígitos del período.

Paso 3: bien sea que el período comience justo después de la coma decimal o algunos números después, debemos sustraer aquellos números cuyo período sea el mismo.

Paso 4: escribir la fracción cuyo numerador es el número de la resta anterior y el denominador es la resta de las potencias de diez utilizadas en la sustracción.

El conjunto de los números irracionales: lo constituyen todos los números que no son racionales.

$$\mathbb{Q}^c = \{x : x \text{ no pertenece a } \mathbb{Q}\}$$

Ejemplo

Algunos números irracionales son:

$$\begin{array}{lll} 0{,}12345\ldots & \sqrt{2} & 113{,}010010001\ldots \\ \pi & e & \sqrt{14} \end{array}$$

■

El conjunto de los números reales: es el conjunto formado por la unión de los números racionales con los irracionales.

$$\mathbb{R} = \{x : x \text{ pertenece a } \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c\}$$

También se suelen expresar como:

$$\mathbb{R} = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ o } x \in \mathbb{Q}^c\}$$

1.2. Operaciones con números reales

Antes de analizar situaciones y contextos que requieran el uso de los números reales, recordemos algunas operaciones básicas entre ellos.

1.2.1. Adición y sustracción de números reales

Ahora que hemos visto cómo están constituidos los conjuntos numéricos vamos a presentar la adición y la sustracción de los números reales, que es el conjunto numérico que reúne a todos los números que aprendimos.

A partir de la adición de números enteros indicaremos la importancia de los signos en una operación, luego, explicaremos la adición y la sustracción de fracciones homogéneas y heterogéneas (que son números racionales) y finalmente, presentaremos la adición y la sustracción de números irracionales.

1.2.2. Adición y sustracción de números enteros

Para adicionar números enteros debemos tener en cuenta los signos de los números que conforman la operación.

Si los signos de los números son iguales **adicionamos** los números y dejamos el signo.

Si los signos de los números son distintos **sustraemos** los números y dejamos el signo del número mayor.

Ejemplo

Operemos: $-2-3-5-8$

Dado que todos los números tienen el mismo signo los adicionamos y dejamos el signo $-$.

$-2-3-5-8=-(2+3+5+8)=-18$

■

Ejemplo

Operemos $-2+3-5+8$

Como los signos son diferentes sustraemos los números y dejamos el signo del mayor; para ello, agrupamos los números del mismo signo y sustraemos los resultados.

$-2+3-5+8=-(2+5)+(3+8)=-7+11=4$

El resultado es positivo debido a que el número mayor es el 11 y es positivo.

■

1.2.3. Adición y sustracción de fracciones homogéneas

Antes de resolver una adición o una sustracción de fracciones homogéneas es importante que las identifiques; ten presente que dos o más fracciones se dicen homogéneas si tienen el mismo denominador.

Para adicionar o sustraer dos o más fracciones homogéneas formamos una fracción cuyo denominador es el mismo de las fracciones dadas y cuyo numerador se obtiene al adicionar o sustraer los numeradores de éstas.

Ejemplo

$\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{3}$ son fracciones homogéneas y para adicionarlas o sustraerlas escribimos el mismo denominador y adicionamos o sustraemos los numeradores.

Adición

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\frac{5}{3} &= \frac{2+5}{3}\\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Sustracción

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}-\frac{5}{3} &= \frac{2-5}{3}\\ &= \frac{-3}{3}=-1\end{aligned}$$

■

1.2.4. Adición y sustracción de fracciones heterogéneas

Para comenzar ten en cuenta que dos o más fracciones se dicen heterogéneas si tienen diferente denominador.

Para adicionar o sustraer dos o más fracciones heterogéneas se pueden realizar tres procesos: formar fracciones equivalentes, usar productos cruzados o determinar el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Observemos cada uno de los procesos mencionados.

Adición y sustracción de fracciones heterogéneas utilizando fracciones equivalentes

Cuando dos o más fracciones son heterogéneas podemos volverlas homogéneas estableciendo fracciones equivalentes, es decir, buscando fracciones equivalentes a las dadas pero, con igual denominador.

Dos fracciones son equivalentes si al amplificarlas o simplificarlas son iguales.

Amplificación de fracciones

Amplificamos una fracción o un número multiplicando tanto el numerador como el denominador por un mismo número. Recordemos que todo número entero se puede expresar como una fracción, cuyo denominador es uno.

Ejemplo

Amplifiquemos 4 en 3 unidades.

Amplificar 4 es multiplicar la fracción $\frac{4}{1}$ por $\frac{3}{3}$:

$$4 = 4 \times \frac{3}{3} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{3} = \frac{12}{3}$$

Así el número 4 es equivalente a $\dfrac{12}{3}$.
■

Ejemplo

Amplifiquemos $\dfrac{3}{2}$ en 8 unidades.

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{8}{8} = \frac{24}{16}$$

Así, el número $\dfrac{3}{2}$ es equivalente a $\dfrac{24}{16}$.
■

Simplificación de fracciones

Simplificamos, a la mínima expresión, una fracción o un número dado dividiendo el numerador y el denominador entre un mismo número, de tal forma que la fracción o número resultante no pueda reducirse más.

Ejemplo

Simplifiquemos $\frac{4}{12}$.

$$\frac{4}{12} = \frac{4 \div 2}{12 \div 2} = \frac{2}{6} = \frac{2 \div 2}{6 \div 2} = \frac{1}{3}$$

Así, el número $\frac{4}{12}$ es equivalente a $\frac{2}{6}$ y a $\frac{1}{3}$.
■

Ejemplo
Simplifiquemos $\frac{16}{20}$.

$$\frac{16}{20} = \frac{16 \div 4}{20 \div 4} = \frac{4}{5}$$

Así, el número $\frac{16}{20}$ es equivalente a $\frac{4}{5}$.
■

De este modo, si queremos adicionar o sustraer fracciones heterogéneas, tan sólo debemos buscar fracciones equivalentes homogéneas a éstas para adicionarlas o sustraerlas.

Ejemplo

Realicemos la adición y la sustracción de las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$; para ello, encontremos fracciones equivalente homogéneas a éstas.

Cuando dos fracciones son heterogéneas debemos encontrar el mínimo común múltiplo de los denominadores para establecer las fracciones equivalentes. El mínimo común múltiplo de 5 y 3 es 15, luego las fracciones se buscan de tal manera que satisfagan lo siguiente:

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{?}{?} = \frac{?}{15} \qquad \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{?}{?} = \frac{?}{15}$$

Dado que la multiplicación de fracciones se realiza multiplicando numerador con numerador y denominador con denominador tenemos que los números que cumplen las condiciones son 3 y 5 respectivamente.

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{15} \qquad \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{15}$$

Así, operar $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ es equivalente a operar $\frac{6}{15} + \frac{5}{15}$ y, operar $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{6}{15} - \frac{5}{15}$.

Adición **Sustracción**

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15} \qquad \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15}$$

■

Ejemplo

Simplifiquemos y efectuemos la adición y la sustracción de las fracciones $\frac{4}{12}$ y $\frac{30}{18}$.

Simplificaremos las fracciones de modo que las equivalentes tengan el mismo denominador:

$$\frac{4}{12} = \frac{4 \div 2}{12 \div 2} = \frac{2}{6} = \frac{2 \div 2}{6 \div 2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{30}{18} = \frac{30 \div 2}{18 \div 2} = \frac{15}{9} = \frac{15 \div 3}{9 \div 3} = \frac{5}{3}$$

Adición **Sustracción**

$$\frac{4}{12} + \frac{30}{18} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1+5}{3} = \frac{6}{3} \qquad \frac{4}{12} - \frac{30}{18} = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = \frac{1-5}{3} = -\frac{4}{3}$$

■

Adición y sustracción utilizando productos cruzados

Podemos adicionar o sustraer dos o más fracciones heterogéneas utilizando productos cruzados, así:

Paso 1: el denominador se constituye multiplicando los denominadores de las fracciones.

Paso 2: el numerador se forma con la adición o la sustracción, según corresponda, de los productos del primer numerador con el segundo denominador y el producto del segundo numerador con el primer denominador[1].

Paso 3: se opera y simplifica el resultado.

Al igual que en el proceso de fracciones homogéneas, cuando los signos son iguales debe adicionarse y dejarse el signo, pero si los signos son distintos los números se sustraen y se deja el signo del número mayor.

Ejemplo

Operemos $\frac{3}{4} + \frac{2}{7}$.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{7} = \frac{}{(4)(7)}$$ Multiplicamos los denominadores y operamos.

$$= \frac{(3)(7)+}{28}$$ Multiplicamos el primer numerador con el segundo denominador y operamos.

$$= \frac{21 + (2)(4)}{28}$$ Multiplicamos el segundo numerador con el primer denominador y operamos.

$$= \frac{21 + 8}{28}$$ Adicionamos los numeradores.

$$= \frac{29}{28}$$ Como no podemos simplificar dejamos la fracción así.

■

Ejemplo

Operar $\frac{3}{4} - \frac{2}{7}$.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{7} = \frac{}{(4)(7)}$$ Multiplicamos los denominadores y operamos.

$$= \frac{(3)(7)-}{28}$$ Multiplicamos el primer numerador con el segundo denominador y operamos.

[1]Este orden es importante y si se efectúa al contrario el resultado será incorrecto.

$= \dfrac{21-(2)(4)}{28}$ Multiplicamos el segundo numerador con el primer denominador y operamos.

$= \dfrac{21-8}{28}$ Sustraemos los numeradores y dejamos el signo del número mayor.

$= \dfrac{13}{28}$ Como no podemos simplificar dejamos la fracción así.

■

Para adicionar números irracionales analizaremos de nuevo los signos de los números que conforman la operación:

- Si los signos son iguales **adicionamos** los números y dejamos el signo.

  Ejemplo

  Operemos $-2\sqrt{3}-3\sqrt{3}$.

  Como todos los números tienen el mismo signo adicionamos y dejamos el signo $-$.

  $-2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=-(2\sqrt{3}+3\sqrt{3})=-5\sqrt{3}$

  ■

- Si los signos son distintos **sustraemos** y dejamos el signo del número mayor.

  Ejemplo

  Operemos $-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}$.

  Dado que los signos son diferentes sustraemos los números y dejamos el signo del mayor.

  $-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=\sqrt{3}$

El resultado es positivo ya que el número mayor es $3\sqrt{3}$ el cual es positivo.

■

En contextos cotidianos suele calcularse el valor de la raíz, sin embargo, en casos donde sólo se pide efectuar la operación es mejor dejar el número escrito como en el ejemplo anterior, debido a que al calcularlo se pierde exactitud, pues todo número irracional es infinito.

1.2.5. Multiplicación y división de números reales

Al igual que en el caso de la adición partiremos de los números enteros para indicar la importancia de los signos y luego, explicaremos la multiplicación y división de los números racionales e irracionales.

1.2.6. Multiplicación y división números enteros

Para multiplicar y dividir números enteros debemos tener en cuenta los signos de los números que constituyen la operación:

- Si los signos son iguales **multiplicamos** o **dividimos** los números y escribimos el resultado con signo positivo.

  Ejemplo

  Operemos: $-4 \cdot (-5)$

  Debido a que los números son negativos multiplicamos los números y escribimos el resultado con signo + o positivo.

  $-4 \cdot (-5) = 20$

  ■

  Ejemplo

  Operemos: $3 \cdot (6)$

  Debido a que los números son positivos multiplicamos los números y escribimos el resultado con signo + o positivo.

  $3 \cdot (6) = 18$

  ■

Ejemplo

Operemos: $-8 \div (-4)$

Debido a que los números son negativos dividimos los números y escribimos el resultado con signo $+$ o positivo.

$-8 \div (-4) = 2$

■

Ejemplo

Operemos: $15 \div 3$

Debido a que los números son positivos dividimos los números y escribimos el resultado con signo $+$ o positivo.

$15 \div 3 = 5$

■

- Si los signos son diferentes **multiplicamos** o **dividimos** y al resultado le asignamos el signo $-$ o negativo.

  Ejemplo

  Operemos: $-4 \cdot (5)$

  Debido a que los números tienen signos diferentes, multiplicamos los números y escribimos el resultado con signo $-$ o negativo.

  $-4 \cdot (5) = -20$ ■

  Ejemplo

  Operemos: $3 \cdot (-6)$

  Debido a que los números tienen signo diferente, multiplicamos los números y escribimos el resultado con signo $-$ o negativo.

  $3 \cdot (-6) = -18$ ■

Ejemplo

Operemos: $-8 \div (4)$

Debido a que los números son de signo diferente, dividimos los números y escribimos el resultado con signo $-$ o negativo.

$-8 \div (4) = -2$ ■

Ejemplo

Operemos: $15 \div (-3)$

Debido a que los números son de signo diferente, dividimos los números y escribimos el resultado con signo $-$ o negativo.

$15 \div (-3) = -5$ ■

1.2.7. Multiplicación y división de fracciones

La multiplicación de fracciones se efectúa de tal forma que en el numerador se escribe el resultado de multiplicar los numeradores de las fracciones y en el denominador se ubica el producto de los denominadores de las fracciones dadas.

Ejemplo

Multipliquemos $\frac{4}{7}$ y $\frac{2}{2}$.

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{(4)(2)}{(7)(3)}$$ Multiplicamos los numeradores y denominadores.

$$= \frac{8}{21}$$ Operamos y si fuese posible debe simplificarse el resultado.

■

Ejemplo

Multiplicar $\dfrac{-9}{5}$ y $\dfrac{5}{3}$.

$\dfrac{-9}{5} \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{(-9)(5)}{(5)(3)}$	Multiplicamos los numeradores y denominadores.
$= \dfrac{-45}{15}$	Operamos.
$= -3$	Simplificamos sacando quinta y tercera.

■

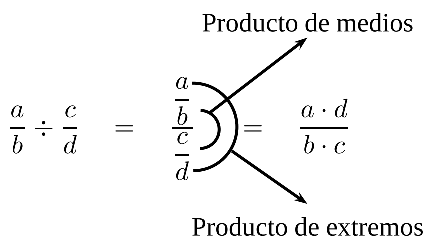
La división de fracciones se puede efectuar de dos formas: a través del inverso multiplicativo y de la ley de los extremos y los medios.

Observemos el proceso de división utilizando el concepto de **inverso multiplicativo**.

Si $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$ son números racionales entonces,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

De otra parte, si usamos la **ley de los extremos y los medios** tenemos que el cociente (o resultado) de la división de dos fracciones se obtiene al formar una fracción cuyo numerador es la fracción de la izquierda y el denominador es la fracción de la derecha del símbolo de división (÷). Luego, multiplicamos los extremos de la fracción y ubicamos el resultado en el numerador; posteriormente multiplicamos los medios y escribimos el resultado en el denominador de la fracción.



Ejemplo

Dividir $\dfrac{-9}{5}$ entre $\dfrac{5}{3}$.

$$\frac{-9}{5} \div \frac{5}{3} = \frac{(-9)(3)}{(5)(5)} \qquad \text{Utilizamos el inverso multiplicativo de } \frac{5}{3}.$$

$$= \frac{-27}{25} \qquad \text{Multiplicamos las fracciones.}$$

■

Ejemplo

Dividir $\dfrac{4}{7}$ entre $\dfrac{8}{5}$.

$$\frac{4}{7} \div \frac{8}{5} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{8}{5}} \qquad \text{Aplicamos la ley de los extremos y los medios.}$$

$$= \frac{20}{56} \qquad \text{Operamos.}$$

$$= \frac{5}{14}$$

■

1.2.8. Multiplicación y división de números irracionales

Debido a que los números irracionales son infinitos y no periódicos solemos utilizar la calculadora para aproximar el valor de una multiplicación o una división de éstos; sin embargo, debemos aplicar las leyes de los signos vistas en los números enteros para identificar el signo del resultado al dividir o multiplicar[2].

1.2.9. Propiedades de los números reales

Sobre el conjunto de los números reales se establecen las siguientes propiedades para la adición y la multiplicación: clausurativa, conmunativa, asociativa,

[2]En esta sección no se presentan ejemplos ya que se puede utilizar la calculadora; más adelante se explicarán las propiedades de los exponentes fraccionarios y con ellas se indicará el proceso para multiplicar números radicales, es decir con raíz.

modulativa, invertiva de la adición[3] e invertiva de la multiplicación[4]. Estas propiedades son útiles porque nos permiten abreviar procesos y cálculos; además le dan sentido a ciertas operaciones asociadas a contextos de la vida cotidiana[5] que analizaremos más adelante.

Sean a, b y $c \in \mathbb{R}$

Propiedad	**Adición**	**Multiplicación**
Clausurativa	$a + b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$
Modulativa	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Invertiva de la adición	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	
Invertiva de la multiplicación		$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1; \quad \text{con } a \neq 0$

Dentro de las propiedades existe una denominada **distributiva de la multiplicación respecto a la adición**:

Sean a, b y c números reales

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Ejemplo

Realicemos las siguientes operaciones utilizando las propiedades de los números reales:

1. $3 - 2(4 - 3)5$
2. $\frac{2}{5} - 4 + \frac{3}{2} - \frac{6}{7}$
3. $5\left(\frac{1}{2}\right) - 8 - \left(\frac{5}{2}\right)$

Al resolver cada operación indicaremos la propiedad utilizada:

[3] La propiedad invertiva de la adición utiliza el concepto de opuesto aditivo de un número. Si a es un número real su opuesto aditivo es $-a$.

[4] La propiedad invertiva de la multiplicación utiliza el concepto de inverso multiplicativo o recíproco de un número. Si a es un número real su inverso multiplicativo es $\frac{1}{a}$.

[5] Estas aplicaciones se observarán en las siguientes secciones.

1.

$3-2(4-3)5 = 3-(8-6)5$	Aplicamos la propiedad distributiva en $2(4-3)$; $2(4-3)=8-6$
$= 3-(40-30)$	Aplicamos la propiedad distributiva en $(8-6)5$; $(8-6)5 = 40-30$
$= 3-40+30$	Aplicamos la propiedad distributiva en $-(40-30)$; $-(40-30) = -40+30$
$= (3+30)-40$	Aplicamos la propiedad conmutativa y asociativa en $3+30$ para agrupar los números con el mismo signo.
$= 33-40$	Operamos.
$= -7$	

2.

$\frac{2}{5}-4+\frac{3}{2}-\frac{6}{7} = \left(\frac{2}{5}+\frac{3}{2}\right)+\left(-4-\frac{6}{7}\right)$	Aplicamos la propiedad asociativa.
$= \frac{4+15}{10}+\frac{-28-6}{7}$	Operamos las fracciones.
$= \frac{19}{10}+\frac{-34}{7}$	
$= \frac{133-340}{70} = \frac{-207}{70}$	Sustraemos las fracciones.

3.

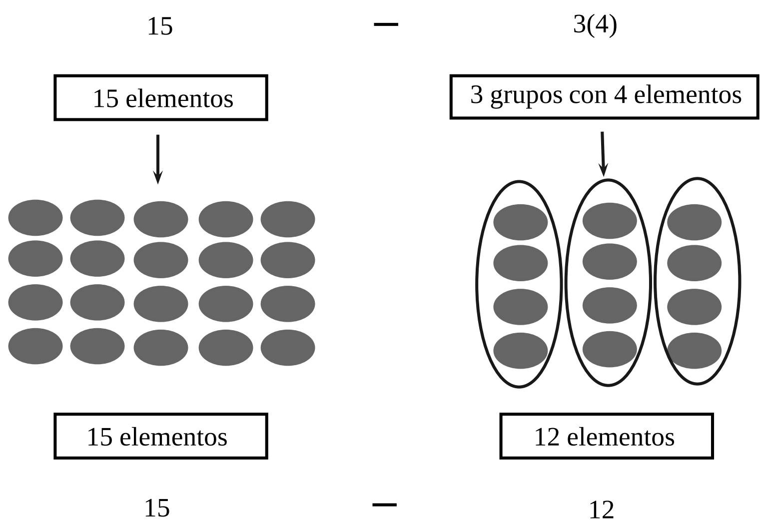
$5\left(\frac{1}{2}\right)-8-\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)-8-\frac{5}{2}$	Realizamos primero la multiplicación: $5\left(\frac{1}{2}\right)$.
$= \frac{5}{2}-8-\frac{5}{2}$	Operamos.
$= \frac{5}{2}-\frac{5}{2}-8$	Aplicamos la propiedad conmutativa.

$= 0 - 8$	Aplicamos la propiedad anulativa.
$= -8$	Aplicamos la propiedad modulativa.

■

Para utilizar las propiedades de los números reales es importante identificar el orden de las operaciones. Cuando en una operación aparecen los paréntesis, éstos indican que primero debemos realizar la operación que ellos encierran, posteriormente efectuamos las multiplicaciones y divisiones y, por último, operamos las adiciones y sustracciones.

Es muy común que en una operación como $10 - 3(2)$ se cometa el error de sustraer el 10 con el 3 para luego multiplicar el resultado con el 2. Este proceso es incorrecto debido a la no comprensión del significado de una multiplicación. Cuando aparece un número multiplicando a otro como en este caso $3(2)$ significa que hay 3 grupos con 2 elementos cada uno, es decir, hay 6 elementos en total. Como ya se sabe, cuántos elementos hay es posible efectuar la operación $10 - 6$ porque en ella estamos sustrayendo objetos de la misma especie (10 elementos menos 6 elementos). Si no realizáramos la operación como se indica, estaríamos diciendo que es posible sustraer de 10 elementos 3 grupos, y entonces, vendría la pregunta ¿3 grupos y de cuántos elementos?; nótese que en esa frase no se conoce el número de elementos a quitar de los 10 que se tienen.



Ejemplo

Operemos $-2 + 4(5 - \frac{1}{4}) - 8(3 - \frac{3}{4})$.

Como indicamos en el párrafo anterior, primero realizaremos las operaciones en los paréntesis, luego las multiplicaciones y por último, las adiciones y sustracciones.

$$\begin{aligned}
-2 + 4(5 - \frac{1}{4}) - 8(3 - \frac{3}{4}) &= -2 + 4\left(\frac{19}{4}\right) - 8\left(\frac{9}{4}\right) \\
&= -2 + \frac{\cancel{4}}{1}\left(\frac{19}{\cancel{4}}\right) - \frac{\cancel{8}}{1}\left(\frac{9}{\cancel{4}}\right) \\
&= -2 + \frac{19}{1} - \frac{2}{1}\left(\frac{9}{1}\right) \\
&= -2 + 19 - 18 \\
&= -1
\end{aligned}$$

■

1.2.10. Potenciación y radicalización

La potenciación y radicalización son operaciones que utilizan exponentes naturales y/o racionales (fracciones). A continuación analizaremos cada una de estas operaciones y sus propiedades.

1.2.11. Exponentes naturales

Cuando multiplicamos un número cierta cantidad de veces estamos determinando la potencia del número. Esta cantidad de veces que multiplicamos se denomina exponente; al número que multiplicamos se le conoce como la base y al resultado de la multiplicación se le llama potencia.

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

Exponente

$$\overset{\uparrow}{\underset{\downarrow}{a}}{}^{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{n-veces}} = b \quad \longrightarrow \quad \text{Potencia}$$

Base

Ejemplo

Calculemos 2^5.

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
■

1.2.12. Propiedades de los exponentes

La potenciación es una operación que al igual que la adición tiene propiedades que facilitan los procesos matemáticos. Sin embargo, éstas sólo pueden utilizarse cuando estamos multiplicando o dividiendo. Observemos:

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $n,\ m \in \mathbb{N}$.

Propiedad	**Multiplicación**	**División**
Bases iguales y exponentes distintos	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Bases distintas y exponentes iguales	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
Exponente cero	$a^0 = 1$ con $a \neq 0$	
Exponente negativo	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ con $a \neq 0$	
Exponente de una potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	

Ejemplo

En cada una de las siguientes operaciones apliquemos las propiedades de los exponentes según corresponda.

1. $3^2 \cdot 3^3$
2. $(3^2)^3$
3. $(3^2 \cdot 5^2)$
4. $(3^2 \div 3^3)$
5. $(3^2 \div 5^2)$
6. (3^0)

Para verificar las propiedades vamos a calcular el valor de cada operación.

1.

$$\begin{aligned}3^2 \cdot 3^3 &= (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3)\\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3\\ &= 3^5 = 3^{2+3}\\ &= 243\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(3^2)^3 &= (3 \cdot 3)(3 \cdot 3)(3 \cdot 3)\\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3\\ &= 3^6 = 3^{2 \cdot 3}\\ &= 729\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}3^2 \cdot 5^2 &= (3 \cdot 3)(5 \cdot 5)\\ &= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5\\ &= 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 && \text{Aplicamos la propiedad conmutativa}\\ & && \text{de la multiplicación.}\\ &= (3 \cdot 5)(3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2\\ &= (15)^2 = 225\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(3^4 \div 3^3) &= \frac{3^4}{3^3}\\ &= \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}\\ &= \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}\\ &= \frac{3}{1}\\ &= 3\\ &= 3^{4-3}\\ &= 3^1 = 3\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}(3^2 \div 5^2) &= \frac{3^2}{5^2}\\ &= \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5}\\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}\\ &= \left(\frac{3}{5}\right)^2\\ &= \frac{9}{25}\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}3^0 &= 3^{1-1}\\ &= \frac{3^1}{3^1}\\ &= \frac{3}{3}\\ &= 1\end{aligned}$$

■

1.2.13. Exponentes racionales

La potenciación se convierte en radicalización cuando aparecen exponentes fraccionarios; dicha operación tiene propiedades heredadas de las de los exponentes naturales y otras propias que la definen, a saber:

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $r,\ s,\ n,\ m \in \mathbb{Z}$ con $n,\ m \neq 0$.

Propiedad	**Multiplicación**	**División**
Exponente fraccionario	$\begin{cases} \text{si } m \text{ es par y } a > 0, & a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}; \\ \text{si } m \text{ es impar y } a \in \mathbb{R}, & a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}. \end{cases}$	
Bases iguales y exponentes distintos	$a^{\frac{r}{n}} \cdot a^{\frac{s}{m}} = a^{\frac{r}{n}+\frac{s}{m}}$	$\dfrac{a^{\frac{r}{n}}}{a^{\frac{s}{n}}} = a^{\frac{r}{n}-\frac{s}{m}}$
Bases distintas y exponentes iguales	$a^{\frac{r}{n}} \cdot b^{\frac{r}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^r}$	$\dfrac{a^{\frac{r}{n}}}{b^{\frac{r}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^r}$
Exponente cero	$a^0 = 1$ con $a \neq 0$	
Exponente negativo	$a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$ con $a \neq 0$	
Exponente de una potencia	$(a^n)^{\frac{1}{m}} = a^{n \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$	

Los exponentes racionales que son fracciones cuya división no es exacta, representan raíces; una raíz se interpreta como el número que multiplicado por sí mismo tantas veces como indica el índice, da el radical. A continuación enunciaremos los términos que intervienen en un radical:

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, entonces

$$\begin{array}{c} \text{Índice} \\ \uparrow \\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = b \longrightarrow \text{Raíz} \\ \downarrow \\ \text{Radical} \end{array}$$

Es necesario aclarar que cuando el índice de una raíz es par (recordemos que no necesariamente toda raíz es cuadrada, puesto que existen raíces cúbicas, de índice 4, 5, etc.), el radical debe ser mayor o igual que cero (positivo o cero) porque si éste fuera menor que cero (negativo) no encontraríamos un resultado en el conjunto de los números reales, ya que ningún número multiplicado por sí mismo un número par de veces, puede dar negativo.

Ejemplo

Calculemos las siguientes raíces:

1. $\sqrt[2]{64}$
2. $\sqrt[3]{-1}$
3. $\sqrt[2]{-4}$
4. $\sqrt[5]{243}$

Para calcular cada ítem necesitamos buscar aquel número que multiplicado por sí mismo, tantas veces como dice el índice, dé el radical. Veamos:

1. El número que multiplicado por sí mismo 2 veces (el índice) da 64 (el radical) es 8: $8 \times 8 = 64$. Luego: $\sqrt[2]{64} = 8$.
2. El número que multiplicado por sí mismo 3 veces (el índice) da -1 (el radical) es -1: $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = (1) \cdot (-1) = -1$. Luego: $\sqrt[3]{-1} = -1$.
3. El número que multiplicado por sí mismo 2 veces (el índice) da -4 (el radical) no existe en el conjunto de los números reales porque $(-2) \cdot (-2) = 4$ y $2 \cdot 2 = 4$.
4. El número que multiplicado por sí mismo 5 veces (el índice) da 243 (el radical) es 3: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Luego: $\sqrt[5]{243} = 3$.

■

Dado que las raíces también son números reales podemos efectuar operaciones entre ellas (adición, sustracción, multplicación y división); sin embargo, la adición de radicales se trabajó en la sección adición de números irracionales, por ende, consideraremos a continuación la multiplicación y la división de estos números.

1.2.14. Multiplicación y división de radicales

Para multiplicar radicales cuyo índice es una fracción cuya división es inexacta utilizamos las propiedades de los exponentes.

Ejemplo

Calculemos las siguientes raíces:

1. $3^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$
2. $(-1)^{\frac{1}{3}} \cdot 125^{\frac{1}{3}}$
3. $(-4)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2)^{\frac{1}{2}}$
4. $8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$
5. $\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{7}}$

Usemos las propiedades de los exponentes radicales para calcular cada ítem.

Cuando la raíz resulte exacta escribimos el resultado y cuando no, podemos dejarla indicada; sin embargo, si el radical aparece en una situación problema determinamos su valor con la calculadora. Veamos:

1. $3^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} = (3 \cdot 2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{6}$
2. $(-1)^{\frac{1}{3}} \cdot 125^{\frac{1}{3}} = (-1 \cdot 125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-125} = -5$
3. $(-4)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2)^{\frac{1}{2}} = (-4 \cdot (-2))^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{8}$
4. $8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 8^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{8^5}$
5. $\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{7}} = 3^{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{7}} = 3^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{3}$

■

Como no nos encontramos en una situación problema sino en un ejercicio aritmético, dejamos los valores indicados; esto se debe a que al calcular las raíces los valores no son exactos y es necesario aproximar o utilizar el proceso de redondeo de números, perdiendo así exactitud en los resultados.

1.3. Análisis de situaciones

Una pregunta muy común cuando tomamos un curso de matemáticas básico es ¿para qué o por qué debemos estudiar los conjuntos numéricos y las propiedades sobre estos? La respuesta a esta pregunta se torna evidente cuando se plantean situaciones de la vida cotidiana y éstas a su vez deben modelarse o representarse por medio de la matemática. Para comprender mejor lo anterior observemos la siguiente situación.

Una persona le plantea a un estudiante un problema que no ha logrado resolver. Ésta le dice: tengo una pequeña empresa y en ella elaboramos sillas para escritorios; para este mes deseo recibir por la venta de la mercancía \$1 000 000. ¿Cuántas sillas debo fabricar para lograr estos ingresos, si cada silla la vendo a \$123 000?

El estudiante, quien ya ha visto y aprobado sus cursos de matemáticas, le dice: voy a plantear una función en la que usted podrá determinar el número de unidades necesarias para obtener cualquier nivel de ingresos. Primero, como no sabemos cuántas sillas se van fabricar denotamos este número con una letra que represente la cantidad desconocida, sea ésta x.
Para determinar los ingresos que genera la venta de x artículos multiplicamos el valor unitario de los productos por la cantidad que vamos a producir y que esperamos vender:

$$Ingresos = \$123\ 000 \times x$$

Como se busca que los ingresos sean de \$1 000 000 vamos a sustituir este valor en la anterior expresión y con ella despejaremos el valor desconocido por medio de procesos matemáticos.

$$\begin{gathered} Ingresos = \$123\ 000 \times x \\ \$1\ 000\ 000 = \$123\ 000 \times x \\ \frac{\$1\ 000000}{\$123\ 000} = x \\ 8{,}1 \approx x \end{gathered}$$

Con lo anterior, el estudiante concluye diciendo: ¡listo! ya sabemos cuántas sillas se deben fabricar. Redondeando, es necesario elaborar 8 sillas.

¿Por qué la conclusión dada por el estudiante está errada? Sencillo, la mayoría de los estudiantes se preocupa por aplicar algoritmos matemáticos sin analizar sus conclusiones. Matemáticamente la aproximación de 8,1 a 8 es correcta, pero en el contexto propuesto no lo es porque al sustituir el valor 8 en la expresión que determina los ingresos obtenemos:

$$\begin{gathered} Ingresos = \$123\ 000 \times x \\ Ingresos = \$123\ 000 \times 8 \\ Ingresos = \$984\ 000 \end{gathered}$$

Este valor no satisface las condiciones requeridas por el propietario de la empresa, ya que él deseaba obtener ingresos de \$1 000000 y con 8 unidades sólo alcanza ingresos de \$984 000. Lo que sucede en realidad es que el estudiante debió aproximar por exceso y no por defecto, es decir, las unidades requeridas son aproximadamente 9. Observemos:

$$Ingresos = \$123\ 000 \times x$$

$$Ingresos = \$123\ 000 \times 9$$

$$Ingresos = \$1\ 107\ 000$$

Con lo anterior podemos concluir que con 9 unidades se logran obtener ingresos superiores a \$1 000 000 que es lo deseado por el propietario.

Por situaciones como la presentada es que se hace necesario conocer los conjuntos numéricos y el uso adecuado de los mismos en determinados contextos.

Veamos ahora las diversas aplicaciones de los mencionados.

Consideremos una empresa que elabora pantalones. Cuando ésta lleva al mercado su producto es posible que ofrezca $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ ó n pantalones donde n es un número natural.

Con los conjuntos numéricos podemos establecer los valores en los que una expresión tiene sentido. Por ejemplo, no sería lógico que la empresa ofrezca en el mercado $\frac{1}{3}$ de pantalón.

Determinar estos conjuntos es conveniente porque permite dar conclusiones y tomar decisiones coherentes, de acuerdo con el contexto que se esté considerando.

Por otra parte, si otra empresa vende queso es razonable que lleve al mercado $\frac{1}{4}$ ó $\frac{1}{2}$ de libra de este producto. Aquí consideramos el conjunto de los números racionales positivos.

En contextos de producción, como cantidad de artículos producidos, los conjuntos numéricos con los que se trabaja son reales positivos, ya que hablar de -1 camisa, -2 libras de frijol u otros números negativos no es coherente.

Donde sí podemos observa el significado y uso de los números negativos, es al tratar de establecer la pérdida que presenta una empresa al producir determinada cantidad de objetos. En este caso, una pérdida se indica con el signo "$-$".

De otra parte, así como los conjuntos numéricos tienen la característica de dar sentido a los contextos en los que se aplica la matemática, también las propiedades que sobre éstos se definen (propiedad clausurativa, conmutativa, asociativa, etc., para la adición y multiplicación) refuerzan la coherencia de las conjeturas efectuadas frente a una situación [6]. Por ejemplo, no es posible adicionar 13 libras de tomate con \$ 1 000:

$$Tomates + \$1\ 000 =?$$

Justamente esto es lo que dice la propiedad clausurativa de la adición en cualquier conjunto; sólo es posible adicionar elementos que pertenezcan al mismo conjunto, en otras palabras, es posible adicionar tomates con tomates, libras con libras, pesos con pesos, metros con metros, pero no libras con metros y demás.

Por lo general y de acuerdo con la situación que se presente, es necesario tener un buen manejo y conocimiento de los conjuntos para que al analizar la situación podamos redondear o dejar los valores exactos según sea conveniente.

A continuación se presentan breves y sencillas situaciones en las que podemos observar el uso del conjunto de los números racionales y las operaciones que en él se definen.

Situación 1

Supongamos que en una cadena de cinco almacenes se ha observado que la venta de impresoras es como se indica en la siguiente tabla.

Impresoras vendidas de enero a junio						
Almacén	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
A	25	30	20	5	15	11
B	30	28	31	25	22	18
C	60	50	39	40	38	43
D	48	36	46	50	32	40
E	10	15	18	22	30	21

Breve estudio del almacén A

Con base en la información dada, ¿qué afirmaciones podemos realizar respecto a las ventas del mes de enero y de febrero? Podría decirse que en febrero se vendieron más impresoras que en enero, en el almacén A.

[6] Ha de tenerse en cuenta que no sólo se definen las propiedades para los conjuntos numéricos, sino que en general, se dice que un conjunto A en el que se ha definido la adición $(+)$ satisface, por ejemplo, la propiedad clausurativa de la adición, si dados dos elementos del conjunto a y b, la suma de ellos también pertenece a A. En otras palabras, $a + b \in A$.

Matemáticamente estas afirmaciones son deducidas al realizar operaciones o al determinar relaciones:

Operación

Número de unidades vendidas en febrero menos $(-)$ *número de unidades vendidas en enero:* $30 - 25 = 5$.

Relación

El número de unidades vendidas en febrero es mayor que el número de unidades vendidas en enero: $30 > 25$. [7]

Ahora bien, dentro de las operaciones que podemos efectuar con las cantidades están: la adición, la sustracción y la división; los resultados de éstas darán una interpretación distinta al análisis elaborado.

Opciones y significado de las diversas operaciones

1. Adición:

   Unidades vendidas en enero más $(+)$ *unidades vendidas en febrero:*

   $$25 + 30 = 55$$

   El número total de unidades vendidas en enero y febrero fue de 55.

2. Sustracción:

   Unidades vendidas en febrero menos $(-)$ *unidades vendidas en enero:*

   $$30 - 25 = 5$$

   Esta operación nos permite concluir que en febrero se vendieron **5 unidades más** que en enero.

   Unidades vendidas en enero menos $(-)$ *unidades vendidas en febrero:*

   $$25 - 30 = -5$$

   Podemos decir entonces que en enero se vendieron **5 unidades menos** de las vendidas en febrero.

[7] El concepto mayor que o menor que es una relación matemática.

Observemos el significado de operar y obtener un resultado positivo o negativo. Aunque el contexto es el mismo los resultados indican una diferencia que representa el orden temporal en el que podemos dar una conclusión.

3. División:

$$\frac{\text{Unidades vendidas en febrero}}{\text{Unidades vendidas en enero}} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$

Por cada 5 artículos vendidos en enero, 6 se vendieron en febrero.

$$\frac{\text{Unidades vendidas en enero}}{\text{Unidades vendidas en febrero}} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

Por cada 6 artículos vendidos en enero, 5 se vendieron en febrero.

Observemos que el cociente entre las cantidades nos proporciona más información que la diferencia, puesto que indica la razón[8] entre las cantidades vendidas de un mes a otro.

Al elaborar un proceso similar con los meses enero y marzo y, febrero y marzo obtenemos las siguientes conclusiones:

- En marzo se vendieron cinco impresoras menos que en enero.
- En enero se vendieron cinco impresoras más que en marzo.
- La razón de impresoras vendidas es:

  $$\frac{4}{5} : \ de\ 5\ unidades\ vendidas\ en\ enero,\ se\ vendieron\ 4\ en\ marzo.$$

  $$\frac{5}{4} : \ de\ 4\ unidades\ vendidas\ en\ marzo,\ 5\ se\ vendieron\ en\ enero.$$

- En febrero se vendieron diez unidades más que en marzo.
- En marzo se vendieron diez unidades menos que en febrero.
- La razón de impresoras vendidas es:

$$\frac{3}{2} : \ por\ cada\ 3\ unidades\ vendidas\ en\ febrero,\ se\ vendieron\ 2\ en\ marzo.$$

$$\frac{2}{3} : \ por\ cada\ 2\ unidades\ vendidas\ en\ marzo,\ 3\ se\ vendieron\ en\ febrero.$$

[8] En ocasiones a esta razón la denominan tasa de cambio de ventas de un mes a otro.

Por otra parte, también es posible interpretar la razón entre el número de impresoras vendidas en dos meses respecto a otro mes.

- $$\frac{Unidades\ vendidas\ en\ enero}{Unidades\ vendidas\ en\ febrero\ +\ Unidades\ vendidas\ en\ marzo}:$$
  $$\frac{25}{30+20}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$$
  Con lo anterior concluimos que en enero se vendió la mitad de lo vendido en febrero y marzo.

- $$\frac{Unidades\ vendidas\ en\ marzo}{Unidades\ vendidas\ en\ enero\ +\ Unidades\ vendidas\ en\ febrero}:$$
  $$\frac{20}{25+30}=\frac{20}{55}=\frac{4}{11}$$
  Por lo anterior, decimos que por cada cuatro impresoras vendidas en marzo se vendieron once en enero y febrero.

- $$\frac{Unidades\ vendidas\ en\ febrero}{Unidades\ vendidas\ en\ enero\ +\ Unidades\ vendidas\ en\ marzo}:$$
  $$\frac{30}{25+20}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$$
  En este caso diremos que por cada dos impresoras vendidas en febrero se vendieron tres entre enero y marzo.

Observemos que en estos casos las fracciones tienen valores menores que la unidad, es decir, menores que uno:

$$\frac{1}{2}=0{,}5$$
$$\frac{4}{11}\approx 0{,}36$$
$$\frac{2}{3}\approx 0{,}6$$

Estos resultados reafirman el hecho de que las ventas de enero fueron menores a las de febrero y marzo juntas, las ventas de marzo fueron menores a las de enero y febrero juntas y que las de febrero fueron menores a las de enero y marzo juntas.

Si por el contrario analizamos el cociente entre la suma de las unidades vendidas en dos meses y otro mes, obtendremos:

- $$\frac{Unidades\ vendidas\ en\ enero\ +\ Unidades\ vendidas\ en\ febrero}{Unidades\ vendidas\ en\ marzo}:$$
$$\frac{25+30}{20}=\frac{55}{20}=\frac{11}{4}$$
Con lo anterior decimos que por cada once impresoras vendidas en enero y febrero se vendieron once en marzo.

- $$\frac{Unidades\ vendidas\ en\ enero\ +\ Unidades\ vendidas\ en\ marzo}{Unidades\ vendidas\ en\ febrero}:$$
$$\frac{25+20}{30}=\frac{45}{30}=\frac{3}{2}$$
Con lo cual concluimos que por cada tres impresoras vendidas entre enero y marzo se vendieron dos en febrero.

- $$\frac{Unidades\ vendidas\ en\ febrero\ +\ Unidades\ vendidas\ en\ marzo}{Unidades\ vendidas\ en\ enero}:$$
$$\frac{30+20}{25}=\frac{50}{25}=\frac{2}{1}=2$$
En este caso diremos que por cada dos impresoras vendidas entre febrero y marzo se vendió una en enero.

Debemos tener en cuenta que los anteriores cocientes ($\frac{11}{4}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{1}=2$), son mayores que 1 y esto nos indica que las unidades vendidas en cada bimestre fueron mayores que la venta mensual.

Con la anterior información podemos dar diversas conclusiones y proponer otros interrogantes; por ejemplo, ¿cuál fue el comportamiento de las ventas trimestralmente (cada tres meses)? Este análisis queda como ejercicio para el lector.

Toda la información que obtenemos al analizar las posibes relaciones entre un mes y otro, o entre varios meses, puede representarse gráficamente.

En ocasiones los números no son suficientes y es necesario elaborar gráficos de líneas, de barras o circulares, entre muchos otros, para interpretar la información o para exponerla frente a un público.

En la siguiente sección estudiaremos la interpretación gráfica de algunos de los anteriores datos; para ello, recordemos los conceptos básicos respecto al tema de gráficos.

1.4. Representación gráfica en el plano cartesiano

En matemáticas utilizamos el concepto de plano cartesiano para representar **parejas ordenadas de números**. Un plano cartesiano se forma con dos rectas numéricas perpendiculares [9]; a la recta numérica horizontal se le denomina eje X y a la vertical eje Y.

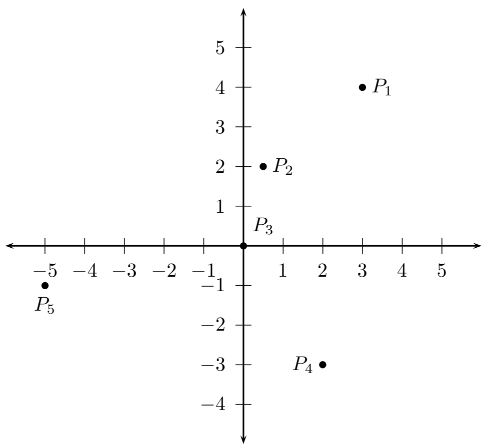
Una pareja ordenada de números suele denotarse por $(a,\ b)$ donde a y $b \in \mathbb{R}$ y a es un número sobre el eje X y b es un número sobre el eje Y; también solemos llamar **abcisa** a la componente en el eje X y **ordenada** a la componente en el eje Y.

Representemos parejas de números ordenados, que de ahora en adelante llamaremos **puntos** en el plano.

Ejemplo

Ubiquemos los puntos $(3,\ 4)$, $(\frac{1}{2},\ 2)$, $(0,\ 0)$, $(2,\ -3)$ y $(-5,\ -1)$.

Nombremos los puntos dados de la siguiente manera[10]: $P_1 = (3,\ 4)$, $P_2 = (\frac{1}{2},\ 2)$, $P_3 = (0,\ 0)$, $P_4 = (2,\ -3)$ y $P_5 = (-5,\ -1)$, la representación gráfica es:



Ahora retomemos la situación de la venta de impresoras y utilicemos el plano cartesiano para representar las ventas de enero, febrero, marzo, abril, mayo y

---

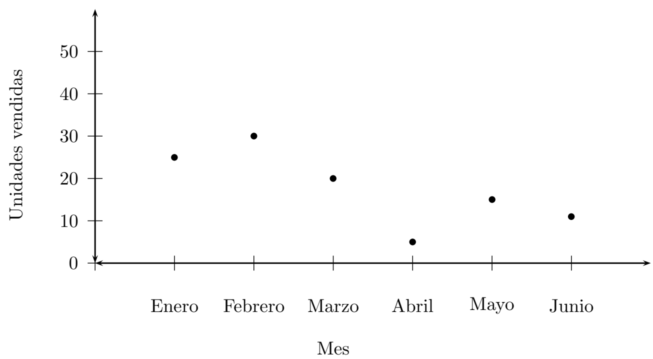
[9] Son rectas tales que el ángulo que forman al intersecarse mide 90°.

[10] P se refiere al punto y los subíndices 1, 2, 3, 4 y 5 al punto 1, punto 2, punto 3, punto 4 y punto 5.

junio en los distintos almacenes según la información de la tabla que contenía esta información. En este caso las parejas formadas no son de números reales ya que en cada pareja aparecen el período y las cantidades vendidas en él: (*mes*, *unidades vendidas*).

Debemos tener en cuenta que esta representación se utilizará sólo para mostrar el uso del plano cartesiano; cuando los datos de una situación o contexto no son ambos numéricos éstos se representan en una gráfica de barras.

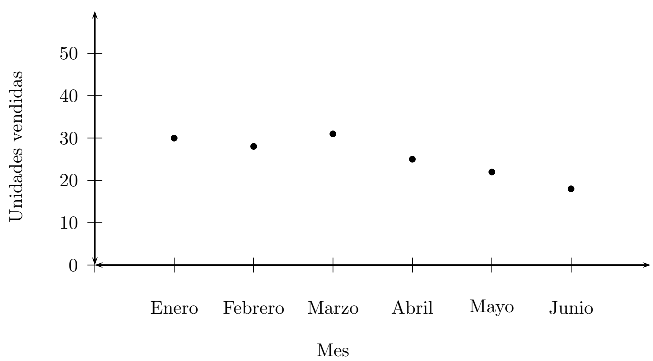
Almacén A



Con base en esta gráfica podemos decir que las ventas fueron decreciendo de mes a mes y en abril fueron muy bajas respecto a los demás.

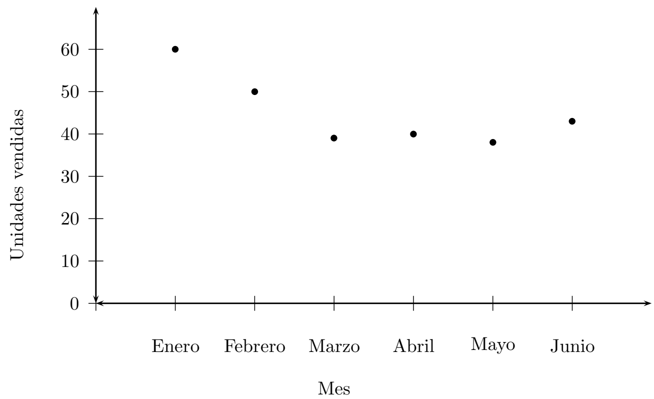
Por otra parte, observamos que en su mayoría las ventas estuvieron entre 20 y 30 unidades, si el lector estudia mercadeo podría analizar qué tipo de estrategias implementar para mantener o superar este nivel de ventas. Además de investigar qué provocó en abril un decenso en la venta de impresoras.

Almacén B



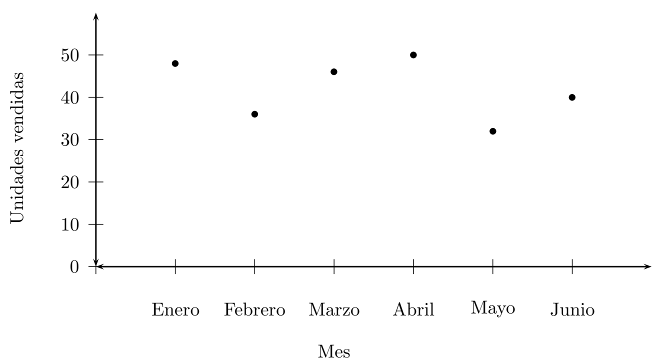
La gráfica ilustra un comportamiento algo regular de mes a mes. Sin embargo, a partir de marzo la ventas decrecieron más en comparación con los meses iniciales.

Almacén C



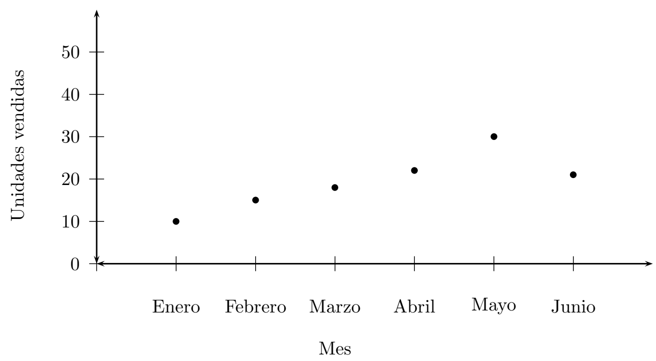
Observamos en esta ilustración que las ventas han decrecido respecto al primer mes, pero en junio hubo un pequeño aumento respecto a los anteriores periódos.

Almacén D



Esta gráfica representa un comportamiento bastante disperso de mes a mes y no se observa regularidad alguna.

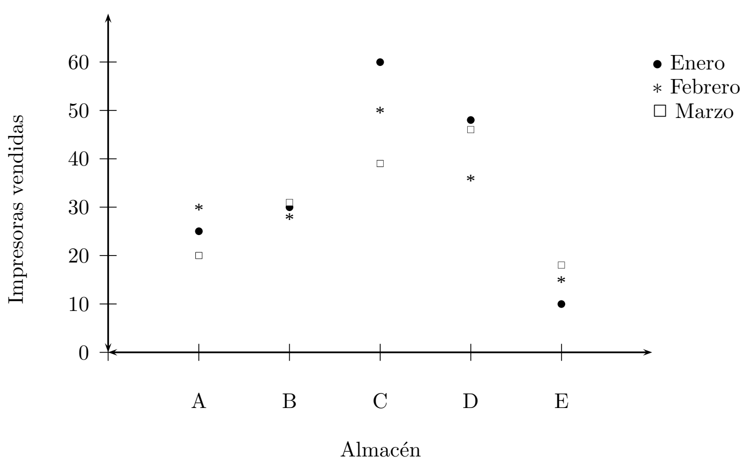
Almacén E



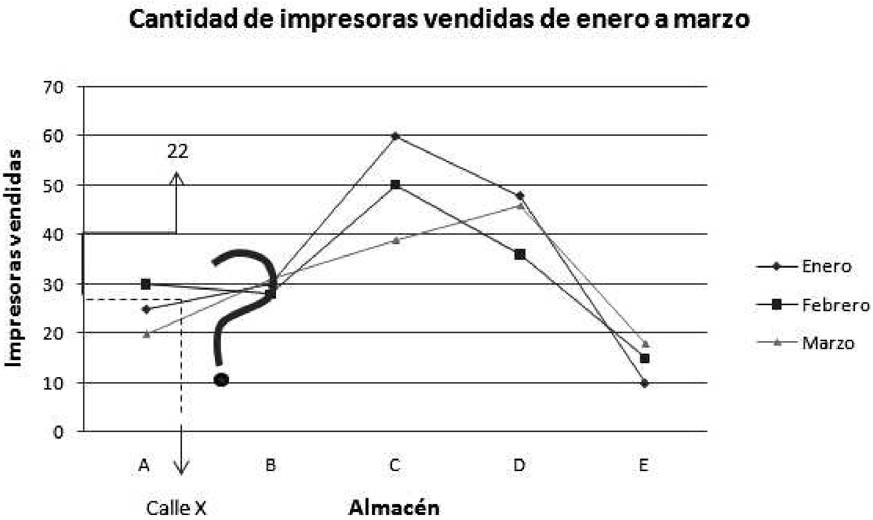
Este almacén ha presentado un incremento en la venta de impresoras de mes a mes. Sin embargo, algo sucedió en junio que hizo que las ventas disminuyeran. Sería interesante efectuar un estudio del almacén que permita determinar la causa de este suceso.

Por otra parte, en ocasiones elaboramos representaciones gráficas que contienen toda la información dada. Observemos este tipo de representación para la tabla de la cadena de almacenes.

Número de impresoras vendidas de enero a marzo



Tengamos en cuenta que no es posible unir los puntos que aparecen en la gráfica porque en el eje horizontal se ubican los almacenes; en otras palabras, es como si A y B representaran la ubicación geográfica de cada almacén. Si se unieran los puntos se diría que en la calle X, que está entre A y B, se vendieron impresoras; hecho que no tiene sentido. Observemos:

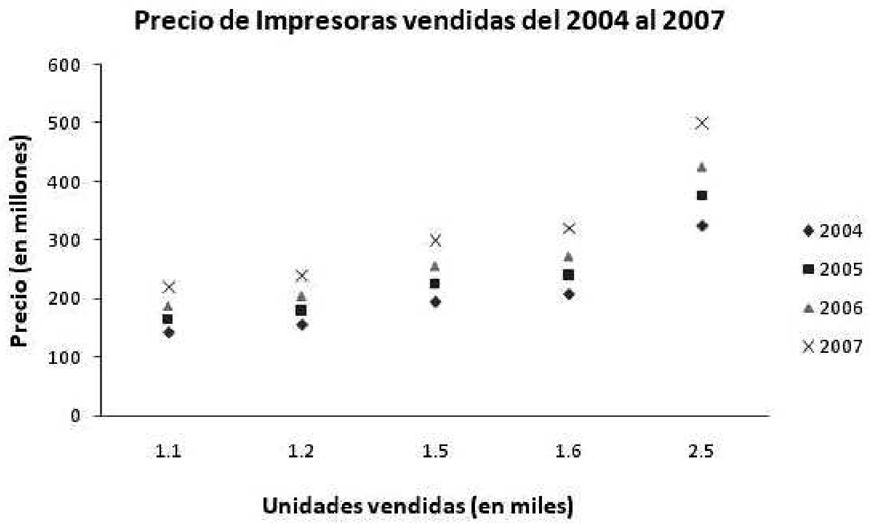


No sólo es posible analizar situaciones como las anteriores. Presentamos a continuación otra situación que también puede aparecer en el contexto de la cadena de almacenes.

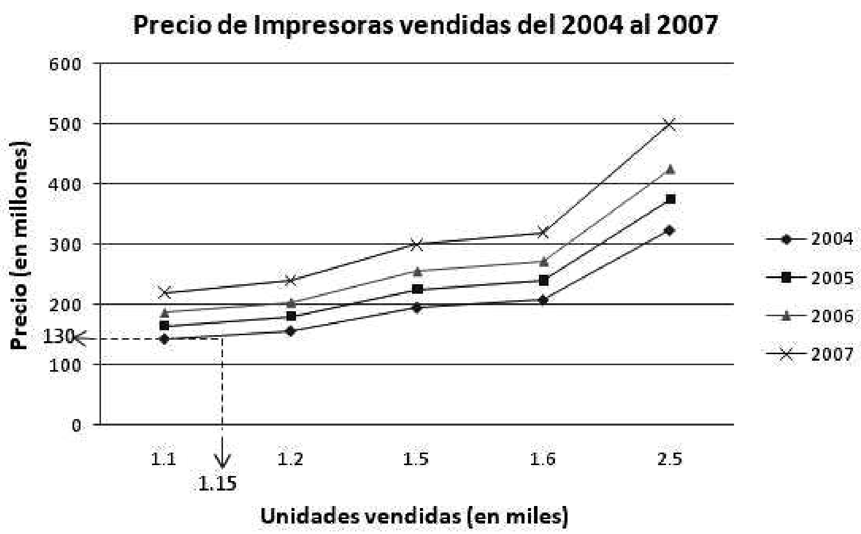
Con la información dada en la siguiente tabla observemos las distintas conclusiones que de ella podemos establecer y las diferencias respecto a las situaciones estudiadas.

Impresoras vendidas en el almacén A (en miles)	Ingreso anual (en millones de pesos)			
	2004	2005	2006	2007
1.1	143	165	187	220
1.2	156	180	204	240
1.5	195	225	255	300
1.6	208	240	272	320
2.5	325	375	425	500

La representación gráfica de la información será, entonces, la siguiente:



A diferencia del contexto de la cadena de almacenes los puntos sobre la gráfica sí pueden unirse. Aclaramos que uniremos los puntos que corresponden al mismo año ya que representan la información de la venta de impresoras anualmente.

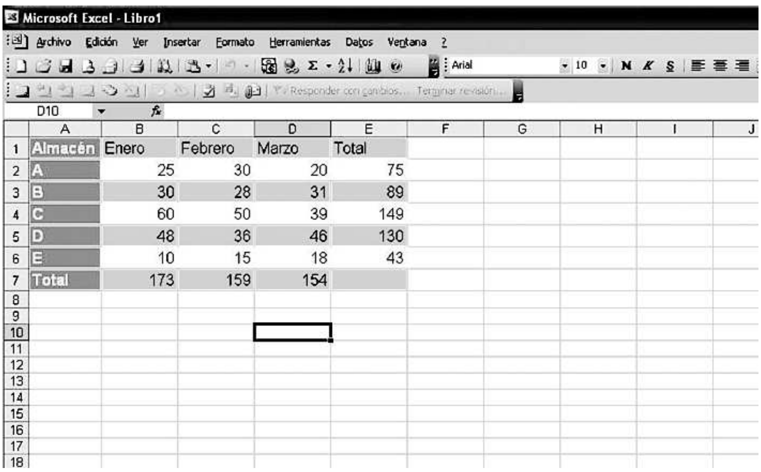


Con la anterior gráfica observamos que el valor aproximado de vender 1150 impresoras en el 2004 fue de \$ 130 000 000. En otras palabras, con la representación dada es posible determinar el valor aproximado de una cantidad de impresoras entre 0 y 2500 [11].

1.5. Uso de la tecnología

Hoy en día existen diversos programas graficadores en los que podemos analizar e interpretar los datos de una situación o un contexto en particular, por ejemplo el procesador Excel. Para claridad de su uso retomemos el ejemplo de la venta de impresoras y observemos el proceso mediante el cual, con Excel, es posible obtener la gráfica cuando ingresamos los datos de la venta de impresoras mensual de cada almacén.

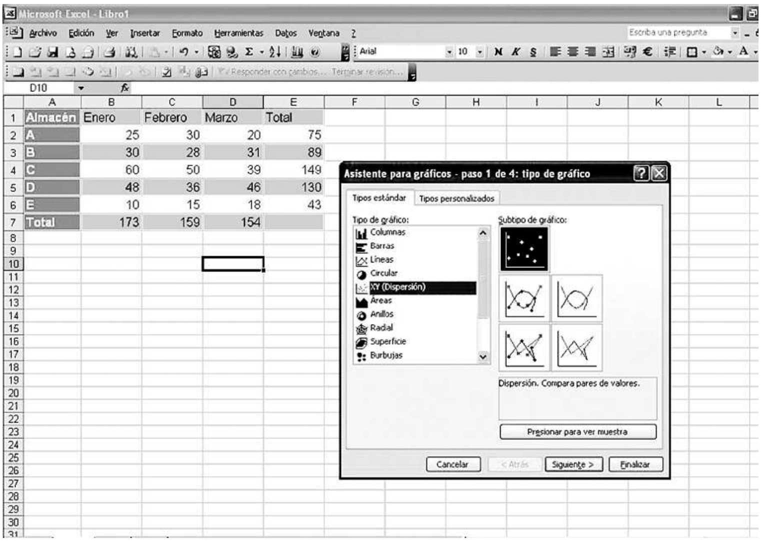
1. Digitamos la información de la tabla en una hoja de cálculo de Excel:



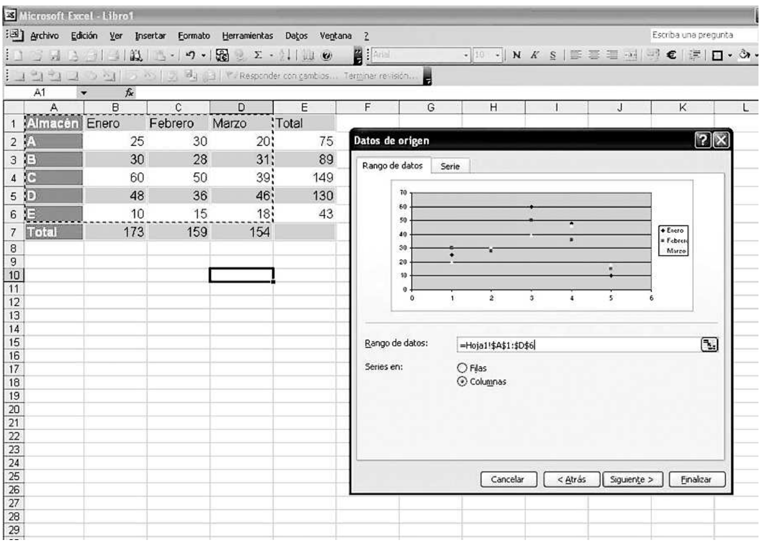
Almacén	Enero	Febrero	Marzo	Total
A	25	30	20	75
B	30	28	31	89
C	60	50	39	149
D	48	36	46	130
E	10	15	18	43
Total	173	159	154	

2. En la barra de herramientas seleccionamos el fichero 'Insertar' y luego 'Gráfico'. En el asistente para gráficos escogemos XY (Dispersión) y damos clic en siguiente:

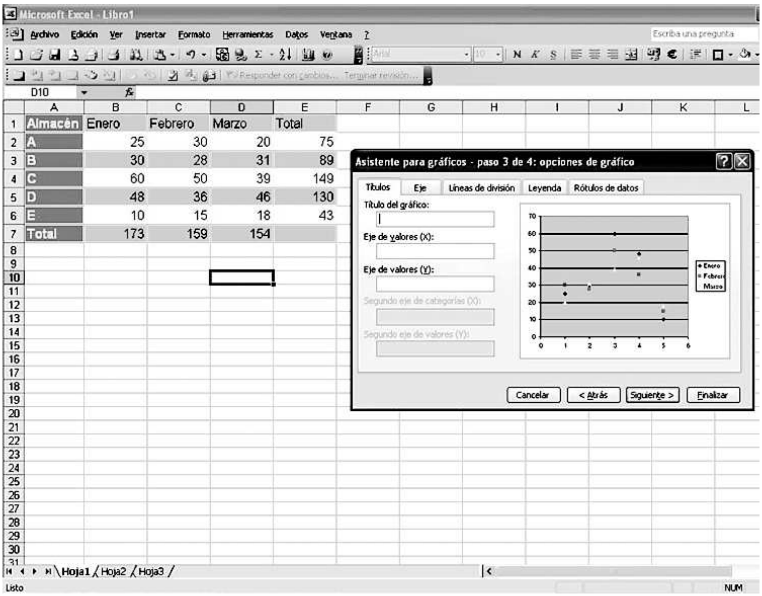
[11] Debemos tener en cuenta que es posible expresar lo anterior por medio del intervalo [0, 2.5]. Por otra parte, no siempre se unen lo puntos con líneas rectas, existe un método conocido como aproximación por mínimos cuadrados que une los puntos con curvas más suaves; sin embargo, éste se utiliza cuando se tiene más información que la existente en este caso.



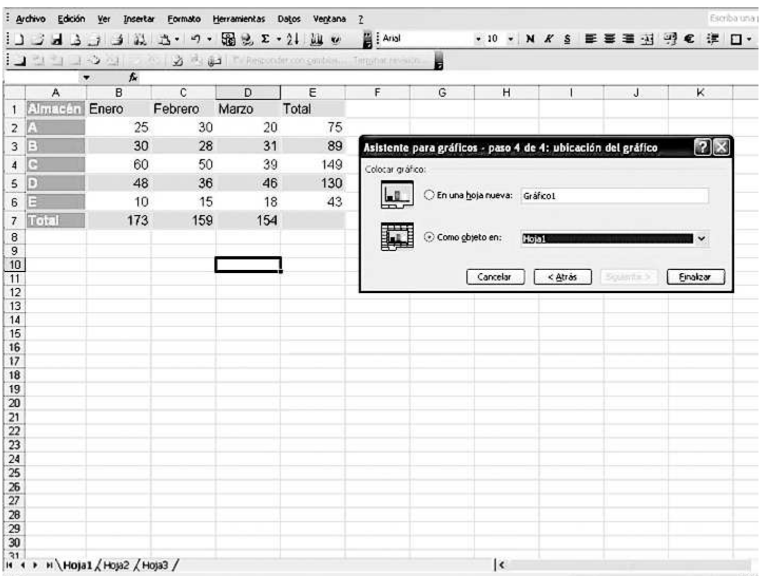
3. Seleccionamos el rango sobre la tabla que contiene la información a graficar y hacemos clic en siguiente:



4. Escribimos los títulos que llevará cada eje en la gráfica y damos clic en siguiente:



5. Determinamos cómo ubicar la gráfica: en la hoja completa o como objeto dentro de ella; luego, damos clic en finalizar.



Podemos realizar un análisis más profundo respecto al comportamiento de las ventas en la cadena de almacenes; sin embargo, necesitamos otros conceptos matemáticos que estudiaremos en capítulos posteriores.

Por ahora, a continuación propondremos algunas actividades con las cuales reforzaremos los conceptos desarrollados en este primer capítulo; lo invitamos a elaborarlas.

1.6. Actividades de práctica

1. En cada caso escriba tres números que satisfagan las condiciones dadas.
   a) Racional que no es entero.
   b) Natural que no sea entero.
   c) Entero que no sea natural.
   d) Racional que sea natural.
   e) Real no racional.
   f) Real no irracional.
2. Exprese por medio de una fracción los siguientes números periódicos.
   a) 3,444444...
   b) 22,187187187...
   c) 182,3456565656...
   d) 32,001001001...
3. Realice las siguientes operaciones.
   a) $2 + \{-3(4 - 8) + 7 - 1(5 - (-6))\}$
   b) $2(5 - 3(1 - 2)) + 4 - 6(7 - 2)$
   c) $\frac{1}{2}(3 - \frac{3}{2}) - \frac{5}{4}$
   d) $4(4 - \frac{5}{3}) - 8(\frac{1}{2} - \frac{4}{5})$
   e) $-(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}) - \frac{4}{3}$
   f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$
4. Utilice las propiedades de los exponentes para resolver cada literal y simplifique el resultado.
   a) $(2)^{-3} \cdot 2^3$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \div \left(\frac{3}{2}\right)^3$

c) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^8$

d) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$

5. Con base en la tabla que contiene la información de la venta de impresoras de enero a junio:

   a) Efectúe un breve estudio del nivel de ventas del almacén B y escriba sus conclusiones o análisis. ____________________

   b) Determine la relación del número de impresoras vendidas entre cada pareja de meses. Establezca la mayor cantidad de relaciones de comparación. Recuerde que esto le ayudará a reforzar y afianzar los conceptos dados.____________________

6. Responda las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es la razón entre el número de unidades vendidas en febrero en el almacén C y en el D?____________________

   b) Si efectúa la diferencia entre las unidades vendidas entre C y D de enero a febrero, ¿qué interpretación le daría al resultado?__________

7. Si una máquina opera durante dos horas y produce 100 artículos,

   a) ¿cuál es la razón entre el número de horas y los artículos?__________

b) ¿Qué le indica la respuesta anterior? En otras palabras, ¿cómo interpreta la relación entre el número de horas y la cantidad de artículos producidos en ese tiempo?

c) Si dos máquinas operan durante dos horas cada una y producen 100 artículos (cada una). Escriba la operación que representa la razón entre el tiempo y el número de artículos producidos por la dos máquinas.

d) Con base en el planteamiento anterior, considere otra máquina que tarda tres horas en producir 150 artículos. Escriba la operación que representa la razón entre el tiempo y el número de artículos producidos por las dos máquinas.

e) ¿Qué conclusiones puede dar respecto a las dos anteriores preguntas?

f) ¿Cuántas máquinas, de la misma clase, debería tener la empresa funcionando al mismo tiempo para producir 4500 artículos a la semana?

g) Si cada artículo se vende a \$21 500, ¿cuáles son los ingresos en esa semana, si vende todos los artículos?

h) Escriba el proceso que lo llevó a dar la respuesta del ejercicio anterior.

8. Una caja puede contener veinte artículos de la misma clase y se ha reservado un espacio para trasportar veinte de ellas en un conteiner. Si se realizan veinte viajes, ¿cuántos artículos se enviaron? Escriba el proceso que efectuó para resolver el ejercicio.

9. Un fabricante obtiene los siguientes datos que relacionan el costo y el

número de unidades producidas de un artículo. Con base en ellos responda cada literal.

Semana	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Unidades producidas, q	0	20	40	60	80	120
Costo en miles de pesos, c	200	220	240	260	280	320

a) ¿Cuál es la variación de los costos de una semana a otra? En otras palabras, ¿cuál es la diferencia de costos de una semana a otra?______

b) ¿Qué tanto aumenta o disminuye la producción de una semana a otra?

c) ¿Qué regularidad se observa en las anteriores respuestas?______

d) Determine la razón entre la variación de los costos y la variación de las cantidades producidas.______

e) ¿Qué interpretación puede dar a esta razón?______

f) Determine la razón entre la variación de las cantidades producidas y la variación de los costos.______

g) ¿Qué interpretación puede dar a esta razón?______

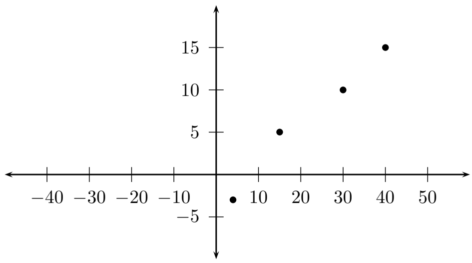
h) Represente en un plano cartesiano las cantidades que aparecen en la tabla.

i) ¿Qué interpretación le daría a la pareja ordenada (0, 200)?______

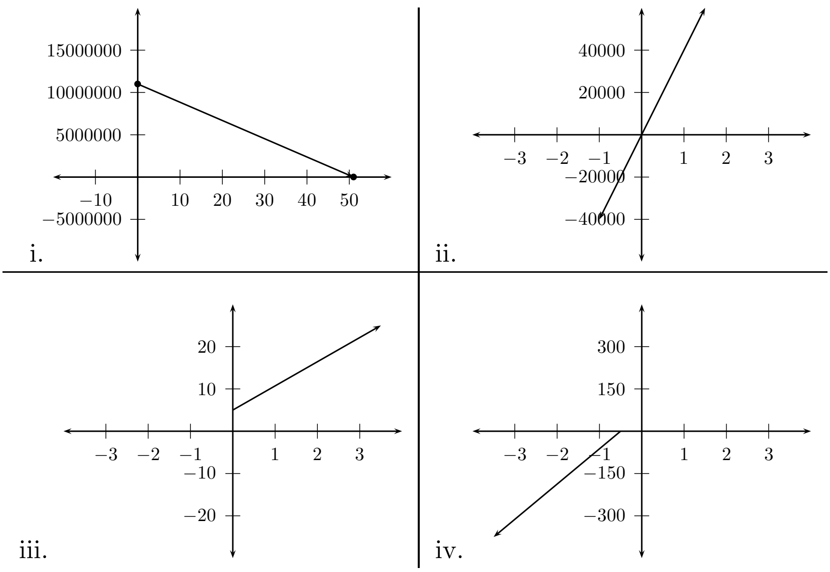
j) ¿Cómo se puede interpretar la pareja (120, 320)?______

10. Observe las siguientes gráficas y desarrolle la actividad planteada en cada caso.

a) Escriba los puntos que aparecen en la gráfica.



b) Para cada gráfica determine el conjunto que forman los números de las abcisas y luego, determine el conjunto que forman los números de las ordenadas.



Capítulo 2

Expresiones algebraicas y polinomios

En este capítulo estudiaremos las expresiones algebraicas, los polinomios y el álgebra que sobre estos se puede establecer.

Tener un buen manejo de las expresiones algebraicas y del álgebra sobre ellas, nos da las herramientas básicas para modelar y plantear situaciones sencillas de las que podemos obtener conclusiones y realizar conjeturas.

2.1. Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es una expresión constituida por uno o más términos. De otra parte, un término es cada una de las partes que se encuentran separadas por el signo de adición o de sustracción en una expresión algebraica. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas.

$$\frac{2x^2-3z}{\sqrt[3]{y}+x} \qquad x^3-2x^2-1 \qquad 6x^8$$

En las anteriores expresiones $2x^2$ y $3z$, por ejemplo, corresponden a los términos que constituyen la expresión algebraica $2x^2-3z$, porque se encuentran separados por el signo de la sustracción $(-)$.

Una expresión algebraica es una expresión formada por letras, llamadas parte literal, números que multiplican a las letras, llamados coeficientes y operaciones como la multiplicación, la adición, la sustracción, la división, la potenciación y la radicación.

Dentro de las expresiones algebraicas existen unas que reciben el nombre de monomios, binomios, trinomios y polinomios; un monomio está constituido por un solo térmmino, un binomio por dos términos, un trinomio por tres términos y un polinomio por más de tres términos.

Los polinomios se clasifican en polinomios de varias variables, si aparecen dos o más letras en los términos de éste, o una variable, si sólo aparece una variable en cada término. A su vez cada polinomio en una o varias variables puede clasificarse según su grado, que es el exponente de la parte literal de cada término de la expresión.

A continuación presentamos el concepto de polinomio y su clasificación según el grado en líneal, cuadrático, cúbico, etc.

Una expresión algebraica es un polinomio con coeficientes reales en una o varias variables, si los números que multiplican las variables son números reales y los exponentes de éstas son números naturales.

Ejemplo

Las siguientes expresiones algebraicas son polinomios con coeficientes reales.

a. $2x^3y + 5xz - 12x^3y$ Polinomio en varias variables.

b. $x^3 + 5x - 12x^7$ Polinomio en una variable.

c. $w^5y + 5xz - 12x^3y^2$ Polinomio en varias variables. ■

Veamos ahora el significado del grado de un polinomio:

Grado de un polinomio		
En una variable	**En varias variables**	
	Con productos de distintas variables	**Sin productos de distintas variables**
Es el valor del mayor exponente de la variable que aparece en el polinomio con coeficiente diferente a cero.	Grado absoluto: es el mayor número que resulta al adicionar los valores de los exponentes de las variables en cada término del polinomio. Grado relativo: es el mayor exponente de la variable elegida, que aparece en todo el polinomio	Grado relativo: es el mayor exponente de la variable elegida, que aparece en todo el polinomio.

Ejemplo

Determinemos el grado de los siguientes polinomios.

a. $x^2y - 7xy^3z + 8x^2yz^5$ Polinomio en varias variables con productos.

Inicialmente determinemos el grado absoluto de cada término del polinomio:

x^2y es de grado 3 porque adicionamos los exponentes de las variables (2 de la variable x y 1 de la variable y): $2 + 1 = 3$.

$7xy^3z$ es de grado 5 porque adicionamos los exponentes de las variables (1 de x, 3 de y y 1 de z): $1 + 3 + 1 = 5$.

$8x^2yz^5$ es de grado 8 porque adicionamos los exponentes de las variables (2 de x, 1 de y y 5 de z): $2 + 1 + 5 = 8$.

Finalmente comparamos los grados de cada término, y conlcuimos que el mayor, en nuestro caso 8, corresponde al grado absoluto del polinomio en varias variables.

Debemos aclarar que si elegimos la variable x el grado relativo del polinomio es el valor del exponente mayor de la misma en todo el polinomio: 2. Pero, si por otra parte elegimos y el grado relativo será 3, y si escogemos a z el grado relativo será 5.

b. $2xy^4$ Monomio en varias variables con productos.

$2xy^4$ es de grado absoluto 5 porque adicionamos los exponentes de cada variable (1 en x y 4 en y): $1 + 4 = 5$.

Si por otra parte elegimos la variable x, el grado relativo del polinomio es 1, mientras que si escogemos a y el grado relativo del polinomio es 4.

c. $3x^2 - 5x + 9x^5$ Polinomio en una variable.

$3x^2 - 5x + 9x^5$ es de grado 5 porque el mayor valor del exponente en todo el polinomio es ese y 9 que es el coeficiente del exponente mayor es diferente de 0.

d. $4x^2 + y^5 - z^4$ Polinomio en varias variables sin productos de variables.

En este tipo de polinomios, por tener más de una variable, es necesario elegir una de las variables y determinar el grado relativo del polinomio respecto a ella.

$4x^2 + y^5 - z^4$ es de grado relativo 2 respecto a la variable x.
$4x^2 + y^5 - z^4$ es de grado relativo 5 respecto a la variable y.
$4x^2 + y^5 - z^4$ es de grado relativo 4 respecto a la variable z.

■

Observemos la clasificación de los polinomios en una variable según su grado.

Clasificación de los polinomios en una variable		
Nombre	**Definición**	**Ejemplo**
Lineal	Son todos los polinomios de grado uno.	▪ $2x + 3$ ▪ $\frac{4}{5} - 7y$
Cuadrático	Son todos los polinomios de grado dos.	▪ $-\frac{1}{2}x + 3 - \frac{3}{7}x^2$ ▪ $4x^2 - x$ ▪ $8x^2$
Cúbico	Son todos los polinomios de grado tres.	▪ $2x - 7x^3$ ▪ $5z^3 - \frac{5}{2}z^2 - z + 8$

Los polinomios de orden superior a tres suelen nombrarse según su grado, por ejemplo los polinomios $x^2 + 4x^3 - 5x^4$, $x^6 - 7x + 8$, y, $7x + 10 - 9x^2 - 5x^9$ son polinomios de orden 4, 6 y 9, respectivamente.

Ahora que reconocemos las expresiones algebraicas y los polinomios estamos preparados para abordar el álgebra que puede definirse sobre ellos; sin embargo, debemos tener presente la importancia del estudio de estos conceptos en nuestro aprendizaje.

Las expresiones algebraicas tienen muchos usos, particularmente en el modelamiento de situaciones cotidianas; en ellas, la parte literal representa información desconocida y se usa para indicar la existencia de la misma. Por ejemplo, si dijeramos: en marzo de este año gané el doble de dinero que en el mismo mes del año pasado, existe información desconocida que es importante (la cantidad de dinero que ganó la persona el año pasado) y necesita ser representada. Para ello, utilizamos una letra, por ejemplo la d, de la siguiente manera:

$$d := \text{cantidad de dinero que ganó la persona el año anterior.}$$

Con esto diríamos que el dinero que tiene en marzo de este año se representa algebraicamente con la expresión:

$$2d := \text{el doble de la cantidad de dinero del año pasado.}$$

Debido a que una expresión algebraica contiene una o más operaciones, debemos aprender a operarlas ya que al igual que con las operaciones de la adición en los números reales éstas tienen sus propiedades.

2.1.1. Operaciones básicas con expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas pueden operarse entre sí, siempre y cuando los términos que aparecen en ellas sean semejantes.

Dos términos son semejantes si su parte literal es la misma, en otras palabras, si las letras con sus exponentes son las mismas en cada término.

Ejemplo

En la expresión algebraica $2x^3y + 5xz - 12x^3y - 3zx$, son términos semejantes:

- $2x^3y$ y $12x^3y$ porque la parte literal en cada término: x^3y y x^3y son iguales.

- $5xz$ y $3zx$ porque la parte literal en cada término: xz y zx son iguales. (Recordemos que el producto es conmutativo.)

■

Adición y sustracción de expresiones algebraicas

Para adicionar o sustraer expresiones algebraicas utilizamos las mismas propiedades de los signos que para la adición; si dos términos son semejantes y tienen signos iguales el resultado se obtiene adicionando los coeficientes de los términos y dejando el signo que tienen. Por otra parte, si dos términos semejantes tienen signos diferentes debemos sustraer los coeficientes y dejar el signo del coeficiente mayor.

Ejemplo

Realicemos las siguientes operaciones con expresiones algebraicas.

1. $a^2b^3c + 3a^2b^3 - 5a^2b^3c + 7a^2b^3 - a^2b$
2. $-\frac{2}{3}xy + 4x^2 - \frac{5}{3}yx - 2x^2$
3. $4w - 3wt - 5wt + 6w$

Es importante tener presente que para resolver los ejercicios necesitamos identificar los términos semejantes y realizar las respectivas operaciones.

1. Para este ejercicio los términos semejantes son: a^2b^3c y $-5a^2b^3c$ que al tener signos diferentes tendrán que sustraerse y $3a^2b^3$ y $7a^2b^3$ al tener signos iguales deberán adicionarse. Como $-a^2b$ no tiene con quien ser semejante se deja igual. Veamos:

   $$\begin{aligned} &a^2b^3c + 3a^2b^3 - 5a^2b^3c + 7a^2b^3 - a^2b \\ &\qquad = a^2b^3c - 5a^2b^3c + 3a^2b^3 + 7a^2b^3 - a^2b \\ &\qquad = -4a^2b^3c + 10a^2b^3 - a^2b \end{aligned}$$

2. En este caso los términos semejantes son $-\frac{2}{3}xy$ y $-\frac{5}{3}yx$ y, $4x^2$ y $-2x^2$ que debemos adicionar por tener signos iguales y sustraer por tener signos

diferentes, respectivamente:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}xy + 4x^2 - \frac{5}{3}yx - 2x^2 &= -\frac{2}{3}xy - \frac{5}{3}yx + 4x^2 - 2x^2 \\ &= -\frac{7}{3}xy + 2x^2 \end{aligned}$$

3. En este ejercicio los términos semejantes son $4w$ y $6w$,y $-3wt$ y $-5wt$ que debemos adicionar por tener el mismo signo

$$\begin{aligned} 4w - 3wt - 5wt + 6w &= 4w + 6w - 3wt - 5wt \\ &= 10w - 8wt \end{aligned}$$

Observemos que los exponentes de las incógnitas (letras) no cambian, se mantienen iguales; ellos cambian únicamente cuando estamos multiplicando. Si adicionamos o sustraemos términos semejantes sólo operamos los coeficientes.

■

Multiplicación y división de expresiones algebraicas

Para multiplicar y dividir expresiones algebraicas debemos tener presentes las propiedades de los exponentes y la propiedad distributiva de la adición respecto a la multiplicación.

Ejemplo

Realicemos las siguientes operaciones con expresiones algebraicas.

1. $(4wx - 3wt - 5t + 6w) \cdot 5xw^2$

2. $(5xy^4t) \cdot (3xy^{-2})$

3. $a^2bc \div 3a^2b^3c$

4. $-\dfrac{2x^5y^{-2}}{4y^3x^2}$

Al resolver estas operaciones no necesitamos usar el concepto de términos semejantes, porque éste se utiliza sólo cuando las operaciones son adiciones o sustracciones.

1. Aplicamos la propiedad distributiva.

$$(4wx - 3wt - 5t + 6w) \cdot 5xw^2$$
$$= 4wx \cdot (5xw^2) - 3wt \cdot (5xw^2) - 5t \cdot (5xw^2) + 6w \cdot (5xw^2)$$

Multiplicamos los coeficientes y aplicamos la propiedad de los exponentes $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

$$= 20w^3x^2 - 15xw^3t - 25txw^2 + 30xw^3$$

2. Multiplicamos los coeficientes y aplicamos la propiedad de los exponentes $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

$$(5xy^4t) \cdot (3xy^{-2}) = 15x^2y^2t$$

3. Aplicamos la propiedad de los exponentes $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\begin{aligned} a^2bc \div 3a^2b^3c &= \frac{a^2bc}{3a^2b^3c} \\ &= \frac{\cancel{a^2}\,\cancel{b}\,\cancel{c}}{3\cancel{a^2}\,\cancel{b}\,b^2\,\cancel{c}} \\ &= \frac{1}{3b^2} \end{aligned}$$

4. Simplificacmos los coeficientes y aplicamos las propiedades de los exponentes $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ y $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

$$\begin{aligned} -\frac{2x^5y^{-2}}{4y^3x^2} &= -\frac{\cancel{2}\,\cancel{x^2}\,x^3}{\cancel{2}\,2y^2y^3\cancel{x^2}} \\ &= -\frac{x^3}{2y^5} \end{aligned}$$

■

La división de expresiones algebraicas más común es la que se realiza entre polinomios, y su estructura es la siguiente:

Dados dos polinomios que corresponden al dividendo y al divisor de una división (con divisor distinto de cero), existen dos únicos polinomios llamados cociente y residuo, tales que:

$$\textit{Dividendo} = (\textit{divisor} \times \textit{cociente}) + \textit{residuo.}$$

Con grado del residuo menor que el del divisor.

Con esta idea el proceso a realizar es:

1. Identificar el dividendo y el divisior de la operación.

2. Elegir una de las letras del polinomio, en caso de tener más de una, de lo contrario hay que considerarla letra que contenga el polinomio y ordenar los términos de acuerdo con sus exponentes de forma descendente.

3. Dividir el término de mayor exponente en el dividendo, entre el de mayor exponente en el divisor.

4. Escribir el cociente y multiplicar este valor por el divisor.

5. Escribir el resultado de la anterior multiplicación debajo del dividendo de acuerdo con el exponente de cada término y sustraerlos, respectivamente.

6. "Bajar.$^{\text{el}}$ término siguiente al que aparece en la resta.

7. Repetir los anteriores pasos hasta que el exponente del residuo sea menor que el del divisor.

8. Escribir el resultado de la división de la siguiente manera:

$$Dividendo \div Divisor = cociente + \left(\frac{resido}{divisor}\right)$$

Ejemplo

Dividamos $3x^2 + 5x - 8$ entre x.

1. Identificamos el dividendo y el divisor.

Dividendo

Divisor

$$\begin{array}{ccccc|l} 3x^2 & + & 5x & - & 8 & x \\ \cline{6-6} &&&&& \\ &&&&& \end{array}$$

2. Ordenamos los términos de acuerdo con sus exponentes, en forma descendente. Como ya se encuentran ordenados continuamos con el siguiente paso.

3. Dividimos el término de mayor exponente del dividendo entre el de mayor exponente en el divisor; para ello, nos preguntamos ¿por cuál término debemos multiplicar al divisor para que nos dé el dividendo?

$$? \cdot x = 3x^2$$

observemos que al multiplicar por $3x$ a x, el producto es $3x^2$:

$$3x \cdot x = 3x^2$$

4. Escribimos el cociente y multiplicamos este valor por el divisor.

$$\begin{array}{ccccc|l} 3x^2 & + & 5x & - & 8 & x \\ \cline{6-6} &&&&& 3x \\ &&&&& \end{array}$$

Multiplicamos el cociente por el divisor: $3x \cdot x = 3x^2$.

5. Escribimos el resultado de la anterior multiplicación debajo del dividendo, de acuerdo con el exponente de cada término y sustraemos.

$$\begin{array}{ccccc|l} 3x^2 & + & 5x & - & 8 & x \\ \cline{6-6} -3x^2 &&&&& 3x \\ \cline{1-3} 0 &&&&& 3x \cdot x = 3x^2 \end{array}$$

6. Bajamos el término siguiente al que aparece en la resta.

$$\begin{array}{ccccc|l} 3x^2 & + & 5x & - & 8 & x \\ \cline{6-6} -3x^2 & & \downarrow &&& 3x \\ \cline{1-3} 0 & & 5x &&& \end{array}$$

7. Repetimos los pasos anteriores hasta que el exponente del residuo sea menor que el del divisor.

   Dividimos el término de mayor exponente del dividendo entre el de mayor exponente en el divisor;

   $$? \cdot x = 5x$$

   observemos que al multiplicar por 5 a x, el producto es $5x$:

   $$5 \cdot x = 5x$$

   Ubicamos el número 5 en el cociente con el signo $+$ y escribimos el producto $5x$ debajo del término $5x$ del dividendo; luego, sustraemos.

   $$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^2 & + & 5x & - & 8 & x \\ \cline{6-6}
-3x^2 & & & & & 3x+5 \\ \cline{1-3}
0 & & 5x & & & \\
 & & -5x & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & &
\end{array}$$

   Bajamos el siguiente término al que aparece en la resta. Como el grado del número 8 es cero porque $8 = 8 \cdot x^0$ y $0 < 1$ donde 1 es el grado del divisor x entonces, hemos terminado el proceso de la división.

   $$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^2 & + & 5x & - & 8 & x \\ \cline{6-6}
-3x^2 & & & & \downarrow & 3x+5 \\ \cline{1-3}
0 & & 5x & & & \\
 & & -5x & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & 8 &
\end{array}$$

8. Escribimos el resultado de la división de la siguiente manera:

   $$Dividendo \div Divisor = cociente + \left(\frac{resido}{divisor}\right)$$

   $$3x^2 + 5x - 8 \div x = (3x + 5) + \left(\frac{8}{x}\right)$$

■

Dentro de los procesos de división encontramos el de *división sintética*, que se utiliza únicamente cuando el dividendo es un polinomio en una variable y el divisor es de la forma $x+a$, donde a es un número entero. Analicemos el proceso.

Ejemplo

Dividamos $3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 2$ entre $x + 2$ utilizando el método de división sintética.

1. Escribimos los coeficientes del dividendo ordenados desde el mayor al menor exponente de la variable x y el término constante del divisor $(+2)$ con signo contrario (-2) así:

$$\begin{array}{ccccc|l} 3 & 2 & -1 & 4 & 2 & -2 \\ \cline{6-6} & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

2. Trazamos una línea horizontal debajo de los anteriores coeficientes, dejando un espacio prudencial para escribir números sobre ella. Luego, bajamos el primer coeficiente de izquierda a derecha; en otras palabras, el coeficiente de la variable con mayor exponente.

$$\begin{array}{ccccc|l} 3 & 2 & -1 & 4 & 2 & -2 \\ \cline{6-6} & & & & & \\ \hline 3 & & & & & \end{array}$$

3. Multiplicamos el número que bajamos en el paso anterior por el número que aparece en el divisor: $3 \cdot (-2) = -6$; escribimos este resultado debajo del segundo número de izquierda a derecha y encima de la línea recta. Luego adicionamos los números de esta columna: $2 + (-6) = -4$.

$$\begin{array}{ccccc|l} 3 & 2 & -1 & 4 & 2 & -2 \\ \cline{6-6} & -6 & & & & \\ \hline 3 & -4 & & & & \end{array}$$

4. Multiplicamos el resultado obtenido en el paso anterior (-4) por el número que aparece en el divisor: $-4(-2) = 8$; escribimos el producto debajo del tercer número de izquierda a derecha y encima de la línea horizontal; adicionamos los valores en esta tercera columna.

$$\begin{array}{ccccc|c}
3 & 2 & -1 & 4 & 2 & -2 \\
 & -6 & 8 & & & \\
\hline
3 & -4 & 7 & & &
\end{array}$$

5. Multiplicamos la adición anterior por el número en el divisor: $7 \cdot (-2) = -14$ y ubicamos este producto debajo del número en la cuarta columna; adicionamos estos valores: $4 + (-14) = -10$.

$$\begin{array}{ccccc|c}
3 & 2 & -1 & 4 & 2 & -2 \\
 & -6 & 8 & -14 & & \\
\hline
3 & -4 & 7 & -10 & &
\end{array}$$

6. Terminamos el proceso multiplicando la anterior adición por el número en el divisor: $-10 \cdot (-2) = 20$ y adicionando este valor con el que se ubica en la última columna: $2 + 20 = 22$.

$$\begin{array}{ccccc|c}
3 & 2 & -1 & 4 & 2 & -2 \\
 & -6 & 8 & -14 & 20 & \\
\hline
3 & -4 & 7 & -10 & 22 &
\end{array}$$

7. Escribimos el cociente y el residuo teniendo en cuenta que el último valor obtenido debajo de la línea horizontal es el residuo y los demás números son los coeficientes del polinomio correspondiente al cociente, cuyo grado es uno menos que el del dividendo.

$$Cociente = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 10$$

$$Residuo = 22$$

8. Escribimos el resultado de la división de la siguiente manera:

$$Dividendo \div Divisor = cociente + \left(\frac{residuo}{divisor}\right)$$

$$(3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 2) \div (x + 2) = (3x^3 - 4x^2 + 7x - 10) + \left(\frac{22}{x+2}\right)$$

Existen muchas otras operaciones que podemos realizar con expresiones algebraicas; sin embargo, para realizarlas necesitamos factorizar en algunas ocasiones. Observemos este proceso.

2.1.2. Factorización de expresiones algebraicas

Cuando tenemos una expresión algebraica ésta se factoriza de diferente manera, según su estructura. A continuación exponemos los principales casos de factorización.

Factorizar una expresión algebraica significa expresarla como producto de factores irblackucibles, de tal modo que al resolverla (operar los factores) se obtenga la expresión original.

Un factor se dice irblackucible si no se puede factorizar, es decir, si se encuentra expresado en su mínima expresión.

Factor común

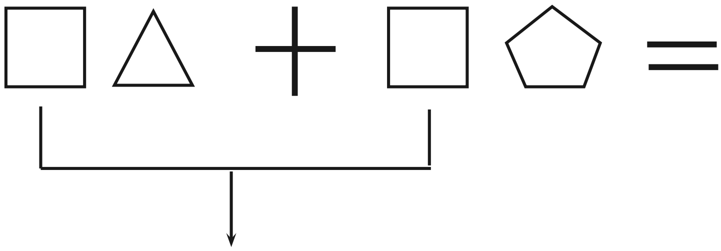
El concepto de factor común viene de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:

Si a, b y c son números reales, entonces $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

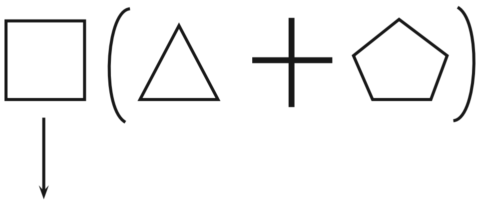
Dado que la anterior expresión es una igualdad, si consideramos la expresión $ax + bx$, entonces $ax + bx = x(a + b)$ que es justamente el concepto de factor común.

El factor común de una expesión algebraica es el factor formado por la parte literal (con menor exponente) y el coeficiente (que corresponde al máximo común divisor de los coeficientes de la expresión algebraica) que se encuentra en cada término de la expresión algebraica.

Es aconsejable comprender que el concepto de factor común no implica que sólo haya una letra común, puede suceder que una expresión con adiciones y/o sustracciones sea factor común. Para familiarizarnos con esta idea veamos la siguiente representación gráfica:



El cuadrado es el elemento común en ambas expresiones



Extraemos el cuadrado, en otras palabras, sacamos factor común; "factorizamos".

Ejemplo

Determinemos el factor común de las siguientes expresiones algebraicas:

1. $5x^2 - 15x^3 + 30x$

   - **Paso 1:** determinamos la parte literal con menor exponente que se encuentra en todos los términos de la expresión:
   $$\begin{array}{ccc} 5x^2 & -15x^3 & 30x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & x & x \end{array}$$
   - **Paso 2:** establecemos el máximo común divisor de los coeficientes:
   $$\begin{array}{ccc} 5x^2 & -15x^3 & 30x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 5 & 5 \end{array}$$
   - **Paso 3:** escribimos el factor común de la expresión algebraica:
   $$5x$$

   Así, la factorización de la expresión $5x^2 - 15x^3 + 30x$ es:
   $$5x^2 - 15x^3 + 30x = 5x(x - 3x^2 + 6)$$

2. $12(x+3)^2 - 7(x+3)^3 + (x+3)^4$

- **Paso 1:** determinamos la expresión algebraica con menor exponente que se encuentra en todos los términos de la expresión:

$$\begin{array}{ccc} 12(x+3)^2 & -7(x+3)^3 & (x+3)^4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (x+3)^2 & (x+3)^2 & (x+3)^2 \end{array}$$

- **Paso 2:** establecemos el máximo común divisor de los coeficientes:

$$\begin{array}{ccc} 12(x+3)^2 & -7(x+3)^3 & 1(x+3)^4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

- **Paso 3:** escribimos el factor común de la expresión algebraica:

$$(x+3)^2$$

De este modo la factorización de la expresión

$$12(x+3)^2 - 7(x+3)^3 + (x+3)^4$$

es:

$$12(x+3)^2 - 7(x+3)^3 + (x+3)^4 = (x+3)^2[12 - 7(x+3) + (x+3)^2]$$

3. $\dfrac{x-3}{y}(5x-8) + (2x^3-9)\dfrac{x-3}{y}$

- **Paso 1:** determinamos la expresión algebraica con menor exponente que se encuentra en todos los términos de la expresión:

$$\begin{array}{cc} \dfrac{x-3}{y}(5x-8) & (2x^3-9)\dfrac{x-3}{y} \\ \downarrow & \downarrow \\ \dfrac{x-3}{y} & \dfrac{x-3}{y} \end{array}$$

- **Paso 2:** establecemos el máximo común divisor de los coeficientes:

$$\begin{array}{cc} 1\dfrac{x-3}{y}(5x-8) & 1(2x^3-9)\dfrac{x-3}{y} \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 \end{array}$$

- **Paso 3:** escribimos el factor común de la expresión algebraica:

$$\frac{x-3}{y}$$

Así, la factorización de la expresión $\frac{x-3}{y}(5x-8)+(2x^3-9)\frac{x-3}{y}$ es:

$$\frac{x-3}{y}(5x-8)+(2x^3-9)\frac{x-3}{y} = \frac{x-3}{y}[(5x-8)+(2x^3-9)]$$

■

Factorización de trinomios cuadrados

Un trinomio cuadrado es un polinomio de grado dos con tres términos, que suele denotarse de la forma $ax^2 + bx + c$ con a, b y c números reales, donde $a \neq 0$, y x (que puede ser cualquier otra letra) es la incógnita. Dichos polinomios se pueden factorizar de dos formas distintas, a saber:

Polinomios de la forma $\mathbf{ax^2 \pm bx}$ con a y b números reales, $a \neq 0$: para este tipo de polinomios utilizamos factor común debido a que en cada término aparece la letra x. Sin embargo, no sólo consideramos la letra como el factor común si no que también, cuando sea posible, se busca el máximo común divisor de los coeficientes como se explicó en la sección de factor común.

Ejemplo

Factoricemos los siguientes polinomios.

a. $5x - 30x^2$
En este polinomio el factor común es $5x$ y la factorización queda así: $5x - 30x^2 = 5x(1 - 6x)$.

b. $3x^2 + 7x$
En este polinomio el factor común es x, de tal modo que la factorización es: $3x^2 + 7x = x(3x + 7)$.

■

Polinomios de la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ [1] con a y b números reales, $a, b, c \neq 0$: a continuación expondremos un método para factorizar esta clase de polinomios, sin embargo, existe otra que no mencionaremos aquí [2].

[2] Ver Álgebra de Baldor.

Ejemplo

Analicemos el método con varios ejemplos.

a. $2x^2 + 7x - 4$
Paso 1: identifiquemos los coeficientes del polinomio; $a = 2$, $b = 7$ y $c = -4$.
Paso 2: multipliquemos los coeficientes a y c; $ac = 2 \cdot 4 = 8$; descomponemos este número en factores primos: $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.
Paso 3: lo que buscamos en este paso es expresar el término del polinomio cuya variable tiene exponente uno, como la adición o sustracción de dos términos y para ello usaremos la descomposición del paso 2 junto con el número 1; veamos.

$2x^2 + 7x - 4 = 2x^2 + \underline{\ ?\ }\, x$ - $\underline{\ ?\ }\, x - 4$	El signo +, que aparece antes del símbolo ?, corresponde al signo del término con la variable de exponente uno y el signo $-$, que aparece después del primer símbolo ?, corresponde al signo que resulta de multiplicar el signo del término con la variable de exponente uno, con el signo del término sin variable.
$2x^2 + 7x - 4 = 2x^2 + 8x - 1x - 4$	Con los números de la descomposición del paso dos determinamos dos números cuya resta sea 7, que es el coeficiente de la variable con exponente uno; en este caso sustraemos porque los signos de los términos con x son diferentes: 8-1=7; en caso contrario (cuando ambos signos son positivos o ambos son negativos), adicionamos.

Paso 4: en este paso factorizamos agrupando los dos primeros términos y los dos últimos; en cada agrupación buscamos el factor común, para con los términos resultantes nuevamente buscar el factor

común. Estos dos pasos nos darán como resultado la factorización del trinomio dado.

$2x^2+7x-4 = 2x^2+8x-1x-4$	
$= 2x(x+4)-1(x+4)$	Realizamos factor común con los dos primeros términos y con los dos últimos.
$2x^2+7x-4 = 2x^2+8x-1x-4$	
$= 2x(x+4)-1(x+4)$	
$= (x+4)(2x-1)$	Realizamos factor común con los dos términos resultantes: 2x(x+4) y 1(x+4).

Con esto concluimos que la factorización de $2x^2+7x-4$ es:

$$2x^2+7x-4 = (x+4)(2x-1).$$

b. w^2+4w+4

w^2+4w+4	Identificamos a a y a c: $a=1$ y $c=4$. Multiplicamos $ac=4$ y descomponemos en factores primos a 4: $4=2\cdot 2$.
$w^2+4w+4 = w^2+\underline{\ ?\ }w+\underline{\ ?\ }w+4$	Descomponemos a $4w$ como la adición de dos términos. Adicionamos, porque los signos que contienen los símbolo de interrogación son iguales (ambos positivos) $+\cdot+=+$. Debemos tener presente que el primer signo corresponde al del término $4w$, mientras que el segundo resulta de multiplicar el primer signo, que corresponde al signo de $4w$, con el signo del término sin variable 4.

$w^2 + 4w + 4 = w^2 + \ 2 \ w + \ 2w + 4$	De la descomposición de $ac = 4$ buscamos dos números que adicionados (esto se debe a que los signos de la x, en el paso anterior, son iguales: $+$) den 4, que es el número que acompaña a w: $2 + 2 = 4$, $2w + 2w = 4w$.
$w^2 + 4w + 4 = w^2 + 2w + 2w + 4$ $= w(w+2) + 2(w+2)$	Hacemos factor común en los dos primeros términos $(w^2 + 2w)$ y en los dos últimos $(2w + 4)$.
$w^2 + 4w + 4 = w^2 + 2w + 2w + 4$ $= w(w+2) + 2(w+2)$ $= (w+2)(w+2)$	Hacemos factor común en los términos resultantes del paso anterior.

Concluimos que la factorización del polinomio es:

$$w^2 + 4w + 4 = (w+2)(w+2)$$

c. $6y^2 - 5y - 6$

$6y^2 - 5y - 6$	Identificamos a a y a c: $a = 6$ y $c = -6$. Multiplicamos $ac = 36$, sin los signos. Descomponemos a 36 en factores primos: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.
$6y^2 - 5y - 6 = 6y^2 \text{ -}\underline{\ ?\ }\,y \ \ +\underline{\ ?\ }\,y - 6$	Descomponemos a $-5y$ como la sustracción de dos términos; sustraemos porque los signos del símbolo de interrogación son distintos (se debe tener presente que el primer signo corresponde al del término $-5y$ mientras que el segundo signo resulta de multiplicar el primer signo, que corresponde al signo de $-5y$, con el signo del término sin variable -6): $- \cdot - = +$.

$6y^2 - 5y - 6 = 6y^2 - 9\ y + 4y - 6$	De la descomposición de $ac = 36$ buscamos dos números que al sustraerlos (esto se debe a que los signos de la incógnita x, en el paso anterior, son distintos: +, -) den -5, que es el número que acompaña a y: $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$ y $-9 + 4 = -5$: $-9y + 4y = -5y$.
$\begin{aligned} 6y^2 - 5y - 6 &= 6y^2 - 9y + 4y - 6 \\ &= 3y(2y-3) + 2(2y-3) \end{aligned}$	Hacemos factor común en los dos primeros términos $(6y^2 - 9y)$ y en los dos últimos $(4y - 6)$.
$\begin{aligned} 6y^2 - 5y - 6 &= 6y^2 - 9y + 4y - 6 \\ &= 3y(2y-3) + 2(2y-3) \\ &= (2y-3)(3y+2) \end{aligned}$	Hacemos factor común en los términos resultantes del paso anterior.

Concluimos que la factorización del polinomio es:

$$6y^2 - 5y - 6 = (2y-3)(3y+2)$$

■

Debemos aclarar que si en algún trinomio cuadrado el término con exponente dos tiene signo $-$ es necesario factorizar a -1 del trinomio para luego aplicar el método expuesto en los ejemplos anteriores.

Ejemplo

Factoricemos $6 + 5t - 6t^2$.

Para aplicar la factorización de los ejemplos anteriores necesitamos organizar el polinomio y factorizar -1 del mismo:

$-6t^2 + 5t + 6$	Ordenamos.
$-6t^2 + 5t + 6 = -1(6t^2 - 5t - 6)$	Factorizamos a -1.
$\begin{aligned} -6t^2 + 5t + 6 &= -1(6t^2 - 5t - 6) \\ &= -1(2t-3)(3t+2) \end{aligned}$	Factorizamos a $6t^2 - 5t - 6$ como hemos aprendido y mantenemos el -1.

$$\begin{aligned}-6t^2+5t+6 &= -1(6t^2-5t-6)\\ &= -1(2t-3)(3t+2)\\ &= (-2t+3)(3t+2)\end{aligned}$$

Multiplicamos el -1 con el primer paréntesis, pero también podríamos multiplicarlo por el segundo. En lo que sí debemos tener cuidado es de no multiplicar ambos factores por -1; recordemos que la multiplicación no es distributiva respecto a la multiplicación; en otras palabras, $abc \neq (ab)(ac)$, lo correcto es que $abc = (ab)c$ o $abc = b(ac)$.

■

Hemos estudiado dos casos de factorización muy importantes en el aprendizaje de la matemática básica; sin embargo, a continuación expondremos otros tres casos llamados productos notables.

Siempre que nos encontremos con una expresión como las que presentemos a continuación podremos factorizarlas y expresarlas como se indica.

Factorización del polinomio	**Nombre**
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$	Diferencia de cuadrados
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	Suma de cubos
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	Diferencia de cubos

Ejemplo

Factoricemos cada uno de los siguientes polinomios:

a. $9x^3y-xy^3$

Usualmente los estudiantes se guían, al momento de abodar un ejercicio de factorización, por el grado del polinomio y suelen pensar que el grado es tres porque aparece varias veces. Sin embargo, esto no es correcto, lo primero que debemos hacer es identificar qué tipo de factorización podemos realizar desde la primera forma (factor común) hasta la última que aprendimos, en otras palabras, revisamos si se puede hacer factor común de lo contrario, verificamos si se puede factorizar como trinomio cuadrado o como diferencia de cuadrados, suma de cubos o diferencia de cubos.
Procedamos de esta forma para resolver nuestro ejercicio.

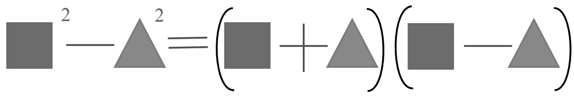
$$9x^3y - xy^3 = xy(9x^2 - y^2) \qquad \text{Realizamos factor común.}$$

Como el segundo factor $(9x^2 - y^2)$ no tiene factor común tratamos de identificar si es trinomio cuadrado o algún producto notable; observemos que es una diferencia entre dos términos. Entonces, nos preguntamos si hay algún método, de los expuestos en factorización, que nos permita factorizar una diferencia de dos términos.

Si retornamos al trinomio cuadrado este pareciera no servirnos a simple vista, porque la expresión $9x^2 - y^2$ no es semejante a la de trinomio cuadrado $(ax^2 + bx + c)$. Sin embargo, realizando un proceso algebraico sí sería posible factorizar la expresión mencionada con el método de trinomio cuadrado; pero si continuamos revisando los métodos, en orden, encontramos que la diferencia de cuadrados podría servirnos. Debemos aclarar que los dos otros métodos, suma de cubos y diferencia de cubos, no nos sirven porque la expresión no tiene cubos sino cuadrados.

Lo que haremos ahora será identificar cómo usar el método de diferencia de cuadrados para factorizar la expresión $9x^2 - y^2$. Aunque matemáticamente hemos simbolizado la diferencia de cuadrados como $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ no es obligatorio que para usar el método siempre aparezcan las letras a y b, en realidad, estas letras sólo simbolizan expresiones; lo que significa es que en lugar de a y b puede haber cualquier expresión algebraica, y lo realmente importante es que cada una de esas expresiones debe estar, obligatoriamente, elevada a la dos.

Veamos en la figura el significado de diferencia de cuadrados, imaginándonos que el cuadrado y el triángulo son cajas en las cuales hay objetos dentro (que en nuestro caso serían las expresiones algebraicas).



De este modo si aplicamos esto a nuestro ejercicio, $9x^2$ debe representarse como una expresión completa al cuadrado[3]: $9x^2 = 3^2x^2 = (3x)^2$. Esto significa que el cuadrado en la figura se reemplazaría por $3x$ mientras que el triángulo sería y.

No lo olvidemos entonces, para poder utilizar diferencia de cuadradros cada término de la diferencia debe estar elevado a la dos y si en los términos hay productos, cada factor debe obligatoriamente estar elevado a la dos.

De este modo:

$$9x^2 - y^2 = (3x)^2 - y^2 = (3x - y)(3x + y)$$

y como consecuencia la factorización de $9x^3y - xy^3$ es:

$$\begin{aligned} 9x^3y - xy^3 &= xy(9x^2 - y^2) \\ &= xy(3x - y)(3x + y) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados.} \end{aligned}$$

b. $x^3 + 64y^3$

Al igual que en el ejercicio anterior debemos comenzar analizando si el polinomio puede factorizarce con factor común; como no es posible verificamos si es un trinomio cuadrado y como no lo es, continuamos hasta notar que es una suma de cubos porque hay sólo dos términos en el polinomio y los factores están o pueden elevarse al cubo. Veamos.

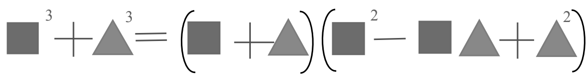
x^3 ya es una expresión completa al cubo mientras que $64y^3$ no es una expresión al cubo y como consecuencia debemos buscar expresarla de dicha manera[4]:

$$64y^3 = 4^3y^3 = (4y)^3$$

Para mayo comprensión podemos ver la suma de cubos en forma gráfica así:

[3]Nótese que en $9x^2$ sólo la x está a la dos y necesitamos que todos los factores de la expresión estén a la dos.

[4]Para lograr este resultado tan sólo debemos tener claras las propiedades de los exponentes e identificar cuál de ellas nos permite llegar a resultados como éste.



Con lo anterior obtenemos que:

$$x^3 + 64y^3 = x^3 + (4y)^3 = (x + 4y)(x^2 - x(4y) + y^2)$$

que puede expresarse, al ordenarla, así:

$$x^3 + 64y^3 = (x + 4y)(x^2 - 4xy + y^2)$$

■

Factorización utilizando el teorema del residuo

Teorema del residuo

Si $f(x)$ es una función polinómica y se divide entre $(x - a)$, con a un número real o complejo, entonces $f(a)$ es el residuo:

$$f(x) = (x - a)q(x) + f(a)$$

donde $q(x)$ es el cociente de dividir $f(x)$ entre $x - a$.

Para determinar los posibles valores que puede tomar a usamos el teorema de los ceros racionales.

Teorema de los ceros racionales

Si $f(x)$ es una función polinómica con coeficientes enteros, entonces todo cero racional es de la forma $\dfrac{p}{q}$ donde p es un factor o divisor del coeficiente constante del polinomio y q es un factor o divisor del coeficiente de la variable con mayor exponente del polinomio.

Veamos entonces cuáles son las raíces del polinomio $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$:

En este caso p son los factores o divisores de 6: ±1; ±2; ±3; ±6 y q son los divisores o factores de 2: ±1 y ±2.

Determinamos todos los valores que puede tomar $\frac{p}{q}$:

$$\pm\frac{1}{1};\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{2}{1};\ \pm\frac{2}{2};\ \pm\frac{3}{1};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{6}{1};\ \pm\frac{6}{2}$$

Simplificamos y escribimos una vez aquellos cocientes que se repiten: ± 1; $\pm\frac{1}{2}$;± 2; ± 3; $\pm\frac{3}{2}$; ± 6.
Como estos son los posibles valores racionales de a, vamos a sustuirlos en $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ para determinar el valor de los residuos:

$$\begin{aligned}
p(1) &= 2(1)^3 - 9(1)^2 + 7(1) + 6 = 6\\
p(-1) &= 2(-1)^3 - 9(-1)^2 + 7(-1) + 6 = -12\\
p(\frac{1}{2}) &= 2(\frac{1}{2})^3 - 9(\frac{1}{2})^2 + 7(\frac{1}{2}) + 6 = 7,5\\
p(-\frac{1}{2}) &= 2(-\frac{1}{2})^3 - 9(-\frac{1}{2})^2 + 7(-\frac{1}{2}) + 6 = 0\\
p(2) &= 2(2)^3 - 9(2)^2 + 7(2) + 6 = 0\\
p(-2) &= 2(-2)^3 - 9(-2)^2 + 7(-2) + 6 = -60\\
p(3) &= 2(3)^3 - 9(3)^2 + 7(3) + 6 = 0\\
p(-3) &= 2(-3)^3 - 9(-3)^2 + 7(-3) + 6 = -150\\
p(6) &= 2(6)^3 - 9(6)^2 + 7(6) + 6 = 156\\
p(-6) &= 2(-6)^3 - 9(-6)^2 + 7(-6) + 6 = -792
\end{aligned}$$

Como con $a = -\frac{1}{2}$, $a = 2$ y $a = 3$ el polinomio se anula, entonces éstas son las raíces racionales del polinomio.

Los factores del polinomio se hallan al dividir $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ entre $2x + 1$, $x - 2$ ó $x - 3$. Cabe resaltar que en el caso en que $a = -\frac{1}{2}$ escribimos la expresión $2x + 1$, que es equivalente y tiene coeficientes enteros. Dicha expresión se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{1}{2}\\
2a &= -1\\
2a + 1 &= 0
\end{aligned}$$

Como encontramos tres factores y el polinomio es de grado 3 la factorización está constituida por ellos; esto significa que:

$$2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = (2x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

También podemos utilizar la división sintética para establecer la factorización con los valores de a que resultaron ser enteros; en nuestro caso $a = 2$ y $a = 3$. De este modo $x - a = x - 2$ y $x - a = x - 3$ son factores de $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$.

Dividamos entre $x - 2$.

2	-9	7	6	2
	4	-10	-6	
2	-5	-3	0	

Dividamos entre $x - 3$.

2	-9	7	6	3
	6	-9	-6	
2	-3	-2	0	

Así, de la anterior operación:

$$2x^3-9x^2+7x+6 = (x-2)(2x^2-5x-3)$$

y

$$2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$$

concluimos que:

$$2x^3-9x^2+7x+6 = (x-2)(x-3)(2x+1)$$

En donde:

$$2x^3-9x^2+7x+6 = (x-3)(2x^2-3x-2)$$

y

$$2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1),$$

por lo cual,

$$2x^3-9x^2+7x+6 = (x-2)(x-3)(2x+1)$$

Observemos que en ambos casos la factorización obtenida es igual a la inicial.

Con la anterior explicación hemos concluido nuestra sección de factorización, y ahora sólo queda practicar, y para ello, comenzaremos una nueva sección en la que aplicaremos matemáticamente todo lo aprendido.

2.1.3. Operaciones con fracciones algebraicas

Para realizar operaciones con fracciones algebraicas en algunos casos debemos utilizar el concepto de máximo común divisor y mínimo común múltiplo para expresiones algebraicas, dado que ya hemos visto el concepto de máximo común divisor nos enfocaremos ahora en el mínimo común múltiplo; veámoslo para luego realizar diversas operaciones con fracciones.

Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas

Para determinar el mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas se requiere encontrar el menor múltiplo que es común en los coeficientes y el literal con menor exponente que es múltiplo común de la parte literal. Los pasos para determinar el mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas son:

1. En caso de que las expresiones algebraicas estén formadas por adiciones o sustracciones, se deben factorizar.
2. Se debe encontrar el mínimo común múltiplo de los coeficientes.
3. Se eligen, de la parte literal de cada expresión algebraica (ya factorizadas, en caso de estar formadas por adiciones y/o sutracciones), los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.
4. Se forma una expresión algebraica, cuyos factores son el coeficiente y el mínimo común múltiplo de las expresiones algebraicas.

Ejemplo

Determinemos el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.

a. $(x^2+2)^2$ y $(x^2+2)^3$

Si observamos, en este ejercicio ninguno de los términos dentro de los paréntesis se puede factorizar, por ello, el máximo común divisor es la expresión algebraica común, es decir, x^2+2 con el menor exponente: $(x^2+2)^2$.

b. $x(x^3-1)$, $x^2(x-1)$ y $x(x^2-1)$

Lo primero que debemos hacer para hallar el mínimo común múltiplo es factorizar cuando sea posible; en nuestro ejercicio hay dos expresiones que pueden factorizarce; éstas son x^3-1 y x^2-1.

Observemos que x^3-1 y x^2-1 representan una diferencia de cubos y de cuadrados, respectivamente, debido a que $x^3-1=x^3-1^3$ y $x^2-1=x^2-1^2$. Recordemos que siempre buscamos que los términos de la diferencia de cubos o de cuadrados estén elevados a la tres y a la dos, respectivamente; además, es claro que $1^3=1$ y $1^2=1$ porque es necesario que busquemos un número que elevado a la tres y a la dos den 1 para no alterar el ejercicio original. En caso de que el segundo término en $x^3 - 1$ no fuera 1 sino 8, por ejemplo, debemos buscar un número que elevado a la tres de 8; en nuestro caso $2^3 = 8$ entonces $x^3 - 8 = x^3 - 2^3$ y así logramos que ambos miembros de la expresión estén elevados a la tres.

Aclarado lo anterior, concluimos que, por la factorización de diferencia de cubos y cuadrados:

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$$

De esta manera nuestras expresiones se convierten en las siguientes:

$x(x^3 - 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1)$, $x^2(x-1)$ y $x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

y de ellas buscamos cuáles son las expresiones comunes (x y $x-1$), con menor exponente y las escribimos como una multiplicación junto con las expresiones no comunes:

$$\underbrace{x(x-1)}_{\text{factores comunes}}\underbrace{(x^2+x+1)(x+1)}_{\text{factores no comunes}}$$

Así el mínimo común múltiplo de: $x(x^3 - 1)$, $x^2(x-1)$ y $x(x^2 - 1)$, es: $x(x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)$.

c. $x^2 + 5x + 6$, $x^2 - 4$ y $x^2 + 3x + 2$

Factorizaremos cada polinomio:

I. $x^2 + 5x + 6$

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 3x + 2x + 6$

Identificamos a $a = 1$ y a $c = 6$, multiplicamos $a \cdot c = 6$, descomponemos este valor $6 = 2 \cdot 3$ y expresamos a $5x$ como la suma de $3x + 2x$ cuyos números son los de la descomposición, que al adicionarlos dan 5.

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 3x + 2x + 6 \\ &= x(x+3) + 2(x+3) \end{aligned}$$

Encontramos el factor común de las dos primeras expresiones y de las dos últimas: $x^2 + 3x = x(x+3)$ y $2x + 6 = 2(x+3)$.

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 3x + 2x + 6 \\ &= x(x+3) + 2(x+3) \\ &= (x+3)(x+2) \end{aligned}$$

Hallamos el factor común de la expresión resultante del paso anterior.

II. $x^2 - 4$

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$$

Como nos encontramos ante una diferencia de cuadrados, debemos buscar qué número elevado a la dos da 4: $2^2 = 4$. No olvidemos que para usar diferencia de cuadrados es obligatorio que cada expresión se encuentre elevada a la dos.

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= x^2 - 2^2 \\ &= (x-2)(x+2) \end{aligned}$$

Realizamos la factorización de diferencia de cuadrados.

III. $x^2 + 3x + 2$

$$x^2 + 3x + = x^2 + 2x + 1x + 2$$

Identificamos a $a = 1$ y a $c = 2$, y multiplicamos $a \cdot c = 2$; descomponemos este valor: $2 = 2 \cdot 1$ y expresamos a $3x$ como la suma de $2x + 1x$, cuyos números corresponden a la descomposición que al adicionarlos dan 3.

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= x^2 + 2x + 1x + 2 \\ &= x(x+2) + 1(x+2) \end{aligned}$$

Buscamos el factor común de las dos primeras y las dos últimas expresiones, respectivamente: $x^2 + 2x = x(x+2)$ y $1x + 2 = 1(x+2)$.

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= x^2 + 2x + 1x + 2 \\ &= x(x+2) + 1(x+2) \\ &= (x+2)(x+1) \end{aligned}$$

Hallamos el factor común de la expresión resultante del paso anterior.

De este modo el mínimo común múltiplo de $x^2 + 5x + 6$, $x^2 - 4$ y $x^2 + 3x + 2$

se obtiene con la factorización de cada uno de los polinomios:

$$(x+3)(x+2),\ (x-2)(x+2) \text{ y } (x+2)(x+1)$$

y es $\underbrace{(x+2)}_{\text{factor común}}\underbrace{(x+3)(x-2)(x+1)}_{\text{factores no comunes}}$

■

Ahora que sabemos determinar el mínimo común múltiplo de polinomios estamos en la capacidad de efectuar operaciones con fracciones algebraicas.

Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Al cociente de dos expresiones algebraicas se le conoce como fracción algebraica y cuando éstas tienen polinomios, tanto en el numerdor como en el denominador se conocen con el nombre de expresiones racionales.

Ejemplo

Las siguientes son expresiones racionales.

a. $\dfrac{x^2+3x}{4x-x^2+2x^3}$ b. $\dfrac{ax^2+bx}{ax-8ax^4}$ c. $\dfrac{36-x^2}{6-x}$

■

La adición y sustración de expresiones racionales se realiza igual que la adición de fracciones con números. Presentamos a continuación dicho proceso.

1. Si es posible, se factorizan los numeradores y denominadores de los polinomios en cada miembro de la adición o sustracción y se simplifican.
2. Se encuentra el mínimo común múltiplo de los denominadores.
3. Se escribe una fracción cuyo denominador es el mínimo común múltiplo.
4. Se divide el mínimo común múltiplo entre cada denominador.
5. Se multiplica cada cociente entre su correspondiente numerador y se ubica como la adición o sustracción, según corresponda, en el numerador de la fracción cuyo denominador es el mínimo común múltiplo.

Ejemplo

Realicemos las siguientes operaciones.

a. $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}$

Inicialmente debemos factorizar los numeradores y denominadores[5] (aquellos que lo permitan); en nuestro caso el denominador que puede factorizarce es $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$.

Ahora buscamos el mínimo común múltiplo de los denominadores $(x-3)(x+2)$, $x+2$ y $x-3$:

$$\underbrace{(x-3)(x+2)}_{\text{factores comunes y no comunes.}}$$

Dividimos el mínimo común múltiplo de los denominadores entre cada denominador:

$\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)}=1$	cociente del mínimo común múltiplo entre el primer denominador.
$\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+2)}=(x-3)$	cociente del mínimo común múltiplo entre el segundo denominador.
$\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}=(x+2)$	cociente del mínimo común múltiplo entre el tercer denominador.

Formamos ahora la fracción cuyo denominador es el mínimo común múltiplo y cuyo numerador es la adición y/o sustracción de los productos de cada cociente con su respectivo numerador.

$$\frac{1\cdot x-(x-3)\cdot 1-2\cdot(x+2)}{(x-3)(x+2)}$$

Luego, realizamos cada producto y adicionamos o sustraemos, según corresponda, los términos semejantes:

[5]No olvidemos que en una expresión algebraica sin denominador debe ubicarse un uno debajo de ella para poder adicionar, sustraer o multiplicar.

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot x-(x-3)-2\cdot(x+2)}{(x-3)(x+2)} &= \frac{x-x+3-2x-4}{(x-3)(x+2)}\\ &= \frac{-2x-1}{(x-3)(x+2)}\end{aligned}$$

b. $\dfrac{x}{x^2+8x+7}-\dfrac{x^2}{x^2-x-56}-\dfrac{3}{x+2}$

Como vimos en el ejercicio anterior, debemos factorizar los denominadores de cada fracción.

- $x^2-x-56=(x+7)(x-8)$
- $x^2+8x+7=(x+7)(x+1)$

Ahora identificamos el mínimo común múltiplo de los denominadores expresados como factores[6].

$$(x+7)(x-8)(x+1)(x+2)$$

Como siguiente paso dividimos el mínimo común múltiplo entre cada numerador de las fracciones algebraicas.

$$\frac{(x+7)(x-8)(x+1)(x+2)}{(x+7)(x+1)}=(x-8)(x+2)$$ cociente del mínimo común múltiplo entre el primer denominador.

$$\frac{(x+7)(x-8)(x+1)(x+2)}{(x+7)(x-8)}=(x+1)(x+2)$$ cociente del mínimo común múltiplo entre el segundo denominador.

$$\frac{(x+7)(x-8)(x+1)(x+2)}{(x+2)}=(x+7)(x-8)(x+1)$$ cociente del mínimo común múltiplo entre el tercer denominador.

Formamos la fracción cuyo denominador es el mínimo común múltiplo y el numerador es la adición o sustracción de la multiplicación de cada cociente

[6] Recordemos que éste se obtiene al multipllicar los factores comunes y no comunes de los denominadores.

con su correspondiente numerador.

$$\frac{x\cdot(x-8)(x+2)-x^2\cdot(x+1)(x+2)-3\cdot(x+7)(x-8)(x+1)}{(x+7)(x-8)(x+1)(x+2)}$$

Realizamos las operaciones (primero las multiplicaciones y luego las adiciones y/o sustracciones).

$$\frac{-x^4-5x^3-8x^2+155x+168}{(x+7)(x-8)(x+1)(x+2)}$$

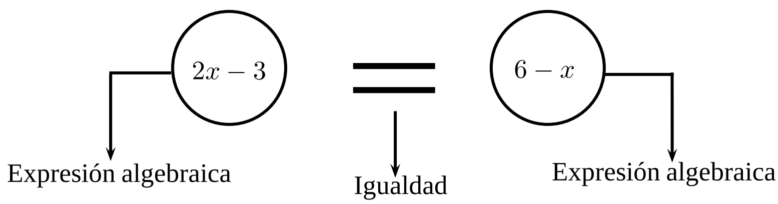
■

En las anteriores secciones se explicaron las operaciones y el álgebra (adición, multiplicación y sus propiedades) que se pueden definir sobre las expresiones mencionadas. Ahora aplicaremos estos conceptos para modelar situaciones que lo requieran.

2.2. Ecuaciones

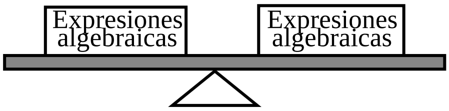
Una ecuación es una igualdad de expresiones algebraicas.

Para comprender mejor este concepto observemos la siguiente ilustración.



Una ecuación puede asociarse al concepto de balanza. El igual representa el equilibrio y las expresiones algebraicas son los pesos a lado y lado de la balanza.

Para **resolver una ecuación** es necesario encontrar el valor numérico de la variable que hace que el equilibrio se mantenga.

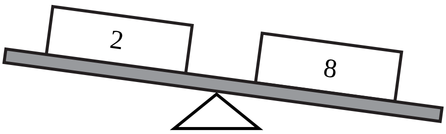


Ejemplo

Resolver la ecuación $3x - 1 = 8$.

Para resolver la ecuación hay que hallar el valor numérico de x que satisface la ecuación, observemos:

Si se considera $x = 1$ y se reemplaza en la ecuación dada $3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$, como $2 \neq 8$ entonces $x = 1$ no satisface la ecuación. Por ello, se debe buscar aquel valor que sí satisface la mencionada.



No hay equilibrio entonces la solución dada no sirve.

Para lograr el equilibrio o mejor determinar el valor que satisface la igualdad, se utiliza el proceso de despejar la variable, en este caso x.

El objetivo ahora es dejar la incógnita x a algún lado del igual completamente sola. Para ello, se usan las propiedades del opuesto aditivo e inverso multiplicativo, entre otras.

Como para la ecuación dada la operación es la sustracción, se comienza por quitar el elemento que está restando al término con la letra x $(3x)$. Para lograrlo, se utiliza la propiedad del opuesto aditivo adicionando a lado y lado del igual el opuesto aditivo de -1 (1) - esto para mantener el equilibrio-.

$$\begin{aligned} 3x - 1 + 1 &= 8 + 1 && \text{Adicionamos a lado y lado el opuesto aditivo de } -1 \ (1). \\ 3x &= 9 && \text{Operamos.} \end{aligned}$$

Se quita el número (3) que acompaña a x; para ello se multiplica a lado y lado de la ecuación por el inverso multiplicativo de 3 que es $\left(\frac{1}{3}\right)$, esto nuevamente para mantener el equilibrio.

$$\left(\frac{1}{3}\right)3x = \left(\frac{1}{3}\right)9 \qquad \text{Multiplicamos por } \frac{1}{3} \text{ a lado y lado.}$$
$$x = 3 \qquad \text{Operamos}$$

Con esto se conluye que el valor de x que satisface la ecuación es 3. Comprobemos:

$$3(3) - 1 = 9 - 1 = 8$$

■

Para reforzar sus conocimientos y practicar el proceso de resolver ecuaciones encontrará más ejercicios al final de este capítulo.

De aquí en adelante presentaremos algunas aplicaciones de la ecuación lineal y cuadrática.

2.3. Ecuación lineal

Una ecuación es lineal si el exponente de la incógnita (o incógnitas) es 1. Existen ecuaciones lineales con 1, 2, 3, ... ó n incógnitas con $n \in \mathbb{N}$.

Una ecuación lineal con una incógnita por lo general se escribe o puede llevarse por medio de operaciones a una expresión de la forma $ax + b = c$ donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Una ecuación lineal con dos incógnitas puede escribirse o llevarse a una expresión de la forma $y = ax + b$ donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

Ejemplo

Ecuación lineal en una incógnita.

La ecuación $x - 3 = 2x - 6$ es lineal porque el exponente de x es, a ambos lados de la ecuación, 1. Por otra parte, la ecuación puede escribirse de la forma $ax + b = c$, de la siguiente manera:

$$x - 2x - 3 = -6 \qquad \text{Adicionamos } -2x \text{ a ambos lados de la ecuación}$$
$$-x - 3 = -6 \qquad \text{Operamos}$$

También es posible llegar a la misma expresión con el siguiente proceso:

$-3 = 2x - 6 - x$	Adicionamos $-x$ a ambos lados de la ecuación
$-3 = x - 6$	Operamos
$-x - 3 = -6$	Adicionamos $-x$ a ambos lados de la ecuación

Para completar el ejercicio, se resuelve la ecuación:

$x - 3 = 2x - 6$	
$x - 2x - 3 = -6$	Adicionamos $-2x$ a ambos lados de la ecuación
$-x - 3 = -6$	Operamos
$-x = -6 + 3$	Adicionamos 3 a ambos lados de la ecuación
$-x = -3$	Operamos
$x = 3$	Multiplicamos por el inverso multiplicativo de -1 ($\frac{1}{-1} = -1$)

■

Ejemplo

Ecuación lineal con dos incógnitas.

La ecuación $2x - y + 4 = -x + 4y$ es lineal con dos incógnitas y puede llevarse a una expresión de la forma $y = ax + b$ de la siguiente manera:

$2x + x + 4 = y + 4y$	Dejamos a un lado de la ecuación los términos con x y los valores constantes, y al otro lado, los términos con y.
$3x + 4 = 5y$	Operamos.
$\dfrac{3x + 4}{5} = y$	Propiedad del inverso multiplicativo.

■

2.3.1. Análisis de situaciones

Situación 1:

Supóngase que un empleado de una fábrica de vidrios corta en dos horas 25 vidrios del mismo tamaño. Si cada vidrio cuesta \$32 000 y todos se venden, ¿cuánto dinero recibe la fábrica de vidrios por la venta?

Algunas de las dificultades más comunes que presentan los estudiantes es la comprensión e interpretación de situaciones problema y el modelamiento o representación matemática de las mismas. Lo más importante para lograr una buena comprensión del problema es identificar la pregunta y toda la información que permite responderla. Veamos:

La pregunta de la situación es: ¿cuánto dinero recibe la fábrica?, los datos que permiten responderla son la cantidad de vidrios cortados y vendidos junto con el valor de cada vidrio.

La operación a realizar para determinar la respuesta es la siguiente:

$$\begin{aligned} &\textit{Dinero recibido} = \textit{cantidad de vidrios cortados} \times \textit{valor de cada vidrio}\\ &\textit{Dinero recibido} = 25 \times 32\ 000 \qquad (2.1)\\ &\textit{Dinero recibido} = 800\ 000 \end{aligned}$$

De este modo se concluye que la cantidad de dinero recibido por la venta es \$800 000.

Es importante identificar las unidades con que se trabaja; por ejemplo, las cantidades producidas son números y el valor o precio de un artículo se mide en pesos, dólares u otras unidades monetarias. Es en casos como éstos en los que se deben tener en cuenta las propiedades de la adición y de la multiplicación, ya que ellas permiten que una operación tenga sentido. Reiteramos la importancia de lo anterior con el siguiente ejemplo:

¿Es posible adicionar 25 vidrios con \$ 32 000? No. Esta operación no tiene sentido, recuérdese que la propiedad clausurativa de la adición indica que sólo es posible adicionar elementos que pertenecen al mismo conjunto.

Por otra parte, si se tienen 25 vidrios y cada uno cuesta \$32 000 tiene sentido multiplicar el valor 25 (que no tiene unidades) con 32 000 (cuya unidad es monetaria) porque la unidad resultante es pesos. Además que esta multiplicación representa la adición de \$32 000 veinticinco veces.

Si se desea generalizar la situación que modela la ecuación 2.1; en otras palabras, si se quiere determinar la cantidad de dinero recibido cuando se produce cierta cantidad de artículos (x), a un determinado precio unitario (P), entonces la operación a realizar es igual a la presentada en 2.1. Sin embargo, para abreviar el proceso se dan nombres a los componentes [7]:

$$I := \text{Ingresos} := \text{Dinero recibido}$$
$$x := \text{Cantidad de artículos producidos}$$
$$P := \text{Precio de venta de cada artículo}$$

Así, para cualquier valor de x y P se puede determinar el ingreso (I) por medio de la ecuación:

$$I = x \cdot P = P \cdot x \qquad \text{Propiedad conmutativa de la multiplicación} \tag{2.2}$$

Obsérvese que si se conoce el valor de P la expresión resultante puede considerarse como una ecuación con dos incógnitas (I, x). De hecho, si se conoce el valor de x igualmente la ecuación es lineal con dos incógnitas (I, P).

Adicionalmente, con la ecuación 2.2 se pueden responder preguntas sobre las posibles incógnitas de la misma ecuación, tales como:

- ¿Cuántos artículos deben venderse para obtener unos ingresos de ... cuando cada unidad se vende a ...?
- ¿A qué precio deben venderse ... unidades para obtener unos ingresos de ...?
- ¿Cuáles son los ingresos al vender ... unidades a ...?

Situación 2:

La empresa “Cortinas y decorados”ofrece en su portafolio de productos la cortina romana. Para una ventana de 1.50 metros de alto y 2 metros de ancho esta cortina cuesta al público $432 000.

¿Cómo pueden determinarse los ingresos de la empresa cuando vende una cantidad x de este artículo?

Para responder la pregunta nuevamente se utiliza la ecuación 2.2. Observemos:

$$I = P \times x = 432\ 000 \times x$$
$$I = 432\ 000x$$

Con la anterior ecuación determinamos los ingresos de la empresa a cualquier nivel de venta ($x = 1, 2, 3, ...$ cortinas ronamas); por ejemplo, si se quiere determinar los ingresos de la empresa cuando se venden 6 cortinas sólo se tiene que sustituir la x por el número 6:

$$I = 432\ 000 \times 6 = 2\ 592\ 000$$

[7] Este es el primer paso que permite modelar una situación matemáticamente.

Luego, los ingresos de la empresa al vender 6 cortinas son de \$ 2 592 000.

Supongase ahora que los ingresos de la empresa, en cierto momento, fueron de \$2 160 000 por la venta de cortinas romanas, ¿cuántas unidades se vendieron? Para responder la pregunta se reemplaza, en la ecuación 2.2, la letra correspondiente a los ingresos (I) por el número 2 160 000 y se halla el valor de x despejando de la ecuación esta incógnita.

$$\begin{aligned} I &= P \times x \\ 2\ 160\ 000 &= 432\ 000 \times x \\ \frac{2\ 160\ 000}{432\ 000} &= x \\ 5 &= x \end{aligned}$$

Se concluye entonces que los ingresos de la empresa fueron de \$2 160 000 cuando se vendieron 5 cortinas romanas.

Situación 3:

El propietario de la fábrica de vidrios de la situación 1, ha encontrado que fuera de los gastos que le produce comprar y trabajar el vidrio, mensualmente gasta \$2 000 000. Además, estableció que el costo unitario de trabajar uno de los vidrios de esa clase es, en promedio, \$12 000.

¿Qué ecuación podría representar los gastos totales en que incurre la fábrica mensualmente?

En esta situación hay dos aspectos a considerar, uno es el significado de \$2 000 000 y el otro el costo de trabajar un vidrio (\$12 000).

A los costos que no cambian o varían con la elaboración o producción de un artículo se le conoce como costos fijos (aunque no se produzca o elabore un artículo, estos gastos deben asumirse). Un ejemplo de ellos son la renta de una propiedad o los servicios del inmueble.

Entonces, ha de tenerse en cuenta que los costos fijos son representados por valores numéricos fijos o constantes, como se conoce en el ámbito de la matemática. En esta situación corresponden a los \$2 000 000. Se notarán los costos fijos con C_f. De este modo, $C_f = 2\ 000\ 000$.

Por otra parte, a los costos que varían o cambian según la producción o elaboración de un artículo se le denominan costos variables, y una expresión que permite determinarlos es:

$$Costo\ variable = cantidad\ producida \times costo\ de\ cada\ unidad\ producida \quad (2.3)$$

Análogamente al caso de los ingresos, se notarán por medio de letras los términos de la anterior expresión:

$$\begin{aligned} C_v &=: \text{Costo variable} \\ x &=: \text{Cantidad de artículos producidos} \\ c &=: \text{Costo de un artículo} \end{aligned}$$

Así,

$$C_v = x \times c = c \times x \qquad \text{Propiedad conmutativa de la multiplicación} \qquad (2.4)$$

Aplicando lo anterior a la situación en estudio se obtiene:

$$\begin{aligned} &C_v = c \times x \text{ y como } c = \$12\ 000 \text{ entonces,} \\ &C_v = 12\ 000 \times x \\ &C_v = 12\ 000x \end{aligned}$$

Con los conceptos de costo fijo y variable se puede determinar la expresión matemática que representa los gastos o costos totales de una empresa:

$$Costos\ totales = costos\ fijos + costos\ variables \qquad (2.5)$$

Notando por C_t a los costos totales, tenemos:

$$\begin{aligned} C_t &= C_f + C_v \\ C_t &= 2\ 000\ 000 + 12\ 000x \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Tenga en cuenta que por la propiedad conmutativa de la adición C_t también puede escribirse como $C_t = 12\ 000x + 2\ 000\ 000$.

La ecuación 2.6 modela, entonces, la situación 3 y representa los gastos totales en que incurre la fábrica de vidrios.

Con ayuda de la ecuación 2.6 es posible averiguar los costos totales de la fábrica cuando se trabajan, por ejemplo, 6 vidrios en un mes:

$$\begin{aligned} C_t &= 2\ 000\ 000 + (12\ 000 \times 6) \\ C_t &= 2\ 072\ 000 \end{aligned}$$

Los costos totales de la fábrica al trabajar 6 vidrios, cierto mes, son de \$2 072 000.

Ejemplo

El costo unitario de cierto artículo es \$12 000. Si se producen 34 de estos artículos, ¿cuál es el costo variable de la producción?

Para determinar el costo variable se efectúa la siguiente operación:

$$C_v = 34 \times 12\ 000 = 408\ 000$$

El costo variable es de \$408 000.

■

2.3.2. Representación gráfica de ecuaciones lineales

En esta sección se tratará la representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas. Recuérdese que toda ecuación lineal es una línea recta al representarse gráficamente. Observemos cómo obtener su gráfica.

Sea $y = ax + b$ con x, y las incógnitas y a, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$; existen dos formas de realizar la gráfica:

Tabulando: se dan valores a x para encontrar los correspondientes valores de y, organizados en una tabla, con los que se forman las parejas ordenadas, cuya primera componente es x y la segunda componente es y.

Con puntos de corte: en una primera instancia se asume $x = 0$ y se encuentra el valor de y según la ecuación dada. En segunda instancia se asume $y = 0$ y se encuentra el valor de x despejándola en la ecuación dada.

Ejemplo

Representar gráficamente la ecuación lineal $y = 2x - 3$ utilizando tabulación.

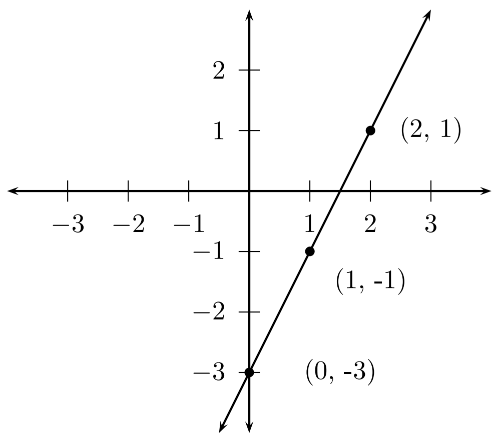
Si $x = 0$ entonces, al reemplazar en la ecuación se obtiene que el valor de y es -3.

$$y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

Si $x = 1$ entonces $y = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$.
Si $x = 2$ entonces $y = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$.

Organizados los datos en una tabla es posible ubicar cada pareja en el plano cartesiano para, por ellas, trazar una línea recta. Veamos:

x	0	1	2
y	-3	-1	1



■

Ejemplo

Representar gráficamente la ecuación lineal $y = 2x - 3$ utilizando puntos de corte.

Si $x = 0$ entonces, al reemplazar en la ecuación se obtiene que el valor de y es -3.

$$y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

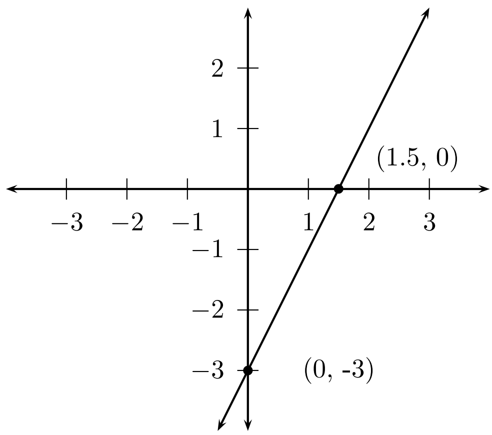
La pareja ordenada es entonces (0, -3) y es el punto de corte con el eje Y.

Si $y = 0$ entonces, $0 = 2x - 3$; de aquí se debe despejar la x para establecer el valor que hace que y sea cero.

$$\begin{aligned} 0 &= 2x - 3 \\ 3 &= 2x \\ \frac{3}{2} &= x \\ 1{,}5 &= x \end{aligned}$$

El otro punto de corte será entonces (1.5, 0) que corresponde al punto de corte con el eje X.

Observemos la línea recta trazada por estos puntos:



■

Estas representaciones gráficas son útiles para observar, por ejemplo, proyecciones de una empresa.

Ejemplo

Si una empresa establece que los ingresos por la venta de cierto artículo se pueden modelar con la ecuación $I = 20\ 000x$, y los costos totales por $C_t = 10\ 000 + 5\ 000x$, ?cómo se representan gráficamente dichas ecuaciones?

Se graficarán las ecuaciones por medio de puntos de corte:

Ingresos: si $x = 0$ entonces, $I = 20\ 000(0) = 0$; luego la pareja ordenada es $(0,\ 0)$.

Si $I = 0$ entonces,

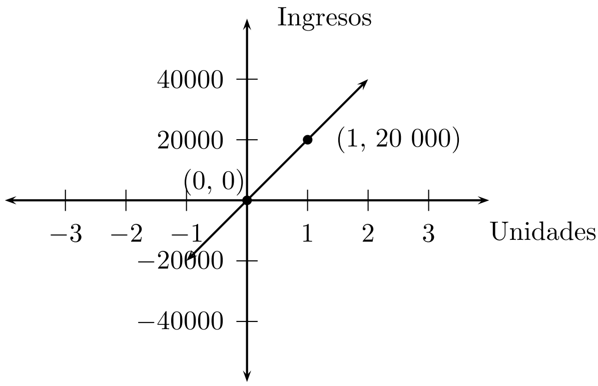
$$\begin{aligned} 0 &= 20\ 000x \\ \frac{0}{20\ 000} &= x \\ 0 &= x \end{aligned}$$

En este sentido, la pareja ordenada correspondiente es: $(0,\ 0)$.

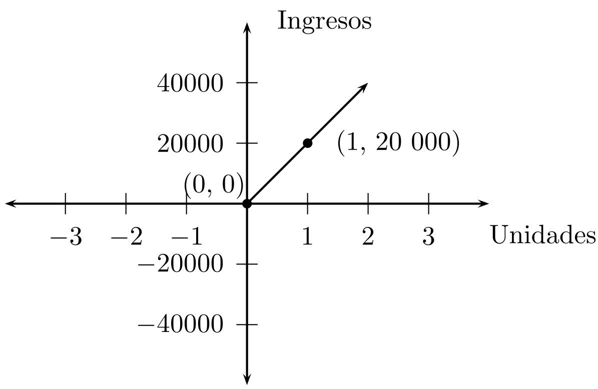
Como los puntos de corte coinciden y son $(0,\ 0)$, se necesita determinar otro punto para lograr hacer la gráfica de la ecuación de ingresos;

para ello, se toma un valor cualquiera para x.

Si $x = 1$, entonces $I = 20\ 000(1) = 20\ 000$, así el punto a dibujar es $(1,\ 20\ 000)$.



Debe tenerse en cuenta que ésta es la representación gráfica de la ecuación $I = 20\ 000x$; sin embargo, no toda la línea recta representa los ingresos de la empresa, ya que por ejemplo los valores de x negativos en el contexto no son coherentes. Obsérvese que $x = -1$ indicaría que se vendió -1 unidad o artículo - afirmación que no tiene sentido -. Por lo anterior, la gráfica adecuada de la situación será:



Como en esta situación no se sabe el tipo de artículo vendido por la empresa se permite dejar la línea continua. Sin embargo, cuando el contexto nos indica el tipo de artículo debe decidirse si la gráfica será punteada o continua.

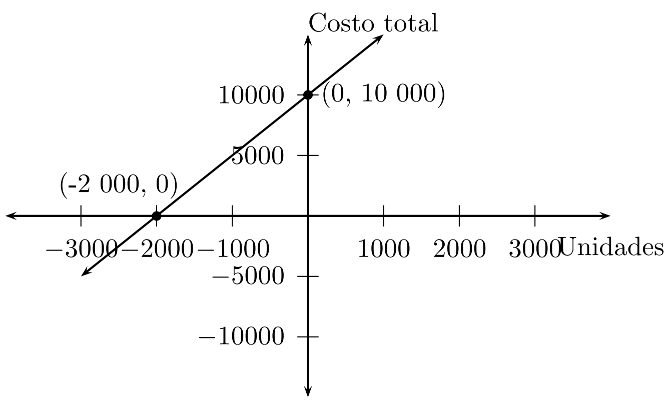
Un ejemplo concreto se observa en una empresa que vende lámparas; no podría ser continua porque no es posible vender por ejemplo 1.5 o 0.8 lámparas, que serían valores de x en el plano cartesiano[8].

Costos totales: si $x = 0$, entonces: $C_t = 10\ 000 + 5\ 000(0) = 10\ 000 + 0 = 10\ 000$; con lo cual el punto de corte es $(0, 10\ 000)$.

Si $I = 0$ entonces

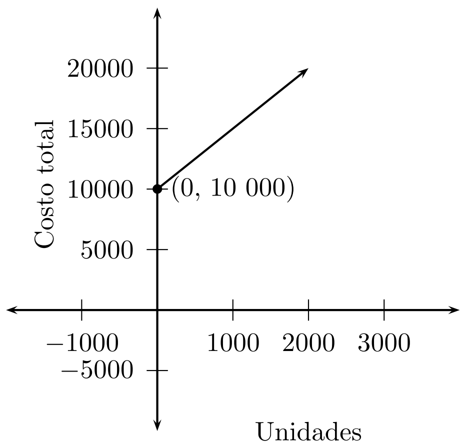
$$\begin{aligned} 0 &= 10\ 000 + 5\ 000x \\ -10\ 000 &= 5\ 000x \\ \frac{-10\ 000}{5\ 000} &= x \\ -2\ 000 &= x \end{aligned}$$

Así, el otro punto de corte es (-2 000, 0) y la representación gráfica de la ecuación $C_t = 10\ 000 + 5\ 000x$ es:



Análogamente a lo dicho para la ecuación que representa los ingresos, en este contexto (el de los costos totales) no es lógico considerar los valores negativos de x, así que la gráfica adecuada es:

[8] Estas características particulares que resultan al modelar situaciones cotidianas por medio de la matemática se estudiará con mayor precisión en el siguiente capítulo que trata el concepto de función.



■

En casos como el anterior se solicita determinar la gráfica de una ecuación lineal, sin embargo, debe tenerse en cuenta que dos puntos determinan una recta y, por ende, con tan solo dos parejas de puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se puede hallar la ecuación que representa la gráfica de una recta.

Una de las características que hace que una recta sea diferente a otra es la *pendiente* (que representa su inclinación), por ende, es lo primero que se halla o determina en el proceso de establecer la ecuación.

La ecuación de una recta puede determinarse de dos formas, según los datos que se tengan:

Forma 1: se da un punto (una pareja de números $(x_1,\ y_1)$) por el que debe pasar la recta y la pendiente m_1 de la misma.

Pasos para determinar la ecuación de la recta:

1. Se escribe la ecuación general de la recta: $y = mx + b$.
2. Se reemplazan los valores dados en la ecuación general: $y_1 = m_1x_1+b$.
3. Se despeja b: $y_1 - m_1x_1 = b$.
4. Se escribe la ecuación: $y = m_1x + (y_1 - m_1x_1)$.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,2) y tiene pendiente 3.

Pasos:

1. Escribir la ecuación general de la recta: $y = mx + b$.
2. Reemplazar el punto en la ecuación: $2 = 3(-1) + b$.
3. Despejar la b:

$$\begin{aligned} 2 &= 3(-1) + b \\ 2 &= -3 + b \\ 2 + 3 &= b \\ 5 &= b. \end{aligned}$$

4. Escribir la ecuación reemplazando el valor hallado de b y la pendiente: $y = 3x + 5$.

■

Forma 2: se dan dos puntos $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$.

Pasos para determinar la ecuación de la recta:

1. Se escribe la ecuación general de la recta: $y = mx + b$.
2. Se calcula la pendiente con los valores dados: $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
3. Se escoge uno de los puntos dados y se reemplazan la pendiente y el punto elegido en la ecuación general: $y_1 = m_1 x_1 + b$.

   En esta ocasión se escogió el punto $(x_1,\ y_1)$ pero se puede escoger el otro.
4. Se despeja b de la ecuación: $y_1 - m_1 x_1 = b$.
5. Se escribe la ecuación: $y = m_1 x + (y_1 - m_1 x_1)$.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,1) y (-2,3).

Pasos:

1. Escribir la ecuación general de la recta: $y = mx + b$.
2. Calcular la pendiente: $m_1 = \frac{3-1}{-2-0} = \frac{2}{-2} = -1$.
3. Escoger un punto y reemplazarlo junto con la pendiente, en este caso (-2, 3): $3 = (-1)(-2) + b$.

4. Despejar b:

$$\begin{aligned} 3 &= (-1)(-2) + b \\ 3 &= -2 + b \\ 3 - 2 &= b \\ 1 &= b. \end{aligned}$$

5. Escribir la ecuación: $y = -1x + 1 = -x + 1$.

■

Saber determinar la ecuación de una línea recta permite en ocasiones modelar matemáticamente un contexto, en el que sólo se conocen dos parejas de datos. Debe tenerse en cuenta que tanto en el caso de conocer dos puntos o en el de tener un punto y la pendiente, es importante comprender el significado de esta última. Como la pendiente es una fracción, y en el capítulo 1 se explicó este concepto, debe interpretarse de la misma manera.

Veamos algunos ejemplos aplicados a situaciones de la vida cotidiana.

Ejemplo

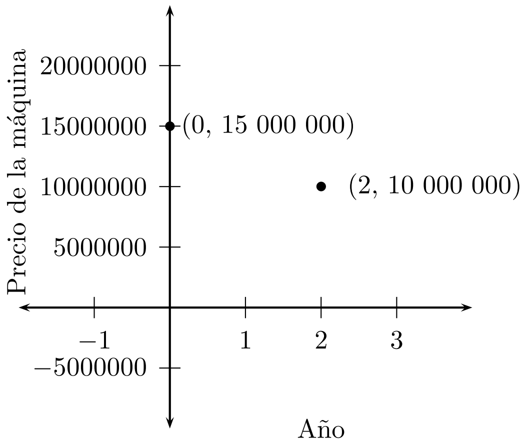
Una máquina se deprecia de forma lineal. Si se compró en 2005 a un valor de \$15 000 000 y en 2007 costaba \$10 000 000, ¿qué expresión modela el precio de la máquina?

Lo primero que se debe comprender en el enunciado es la frase "se deprecia de forma lineal", que significa que el precio de la máquina se modela con la ecuación de una recta porque ésta es lineal. Entonces se necesita saber qué datos se tienen, ¿un punto y la pendiente? o quizás ¿dos puntos? Si se observa el enunciado lo que se tiene son dos puntos:

$$2005 \longrightarrow \$15\,000\,000$$

$$2007 \longrightarrow \$10\,000\,000$$

Usualmente, para evitar escribir los años a escala en el eje x, se asigna al año 2005 el número 0, que de alguna manera representa el tiempo inicial o en el que se compra la máquina, así la escala puede hacerse de 1 en 1; el año 2007 será el número 2 y así sucesivamente. Observemos estos dos puntos en el plano cartesiano.



Al comprender la información dada se puede determinar la ecuación solicitada utilizando los pasos de la forma 2. Se hallará la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 15 000 000) y (2, 10 000 000).

Pasos:

1. Escribir la ecuación general de la recta: $y = mx + b$.

2. Calcular la pendiente: $m = \frac{10\ 000\ 000 - 15\ 000\ 000}{2-0} = \frac{-5\ 000\ 000}{2} = -2\,500\,000$.

3. Escoger un punto y reemplazarlo junto con la pendiente, en este caso (0, 15 000 000): $15\ 000\ 000 = (-2\ 500\ 000)(0) + b$.

4. Despejar b:

$$\begin{aligned}15\ 000\ 000 &= (-2\ 500\ 000)(0) + b\\ 15\ 000\ 000 &= 0 + b\\ 15\ 000\ 000 &= b\end{aligned}$$

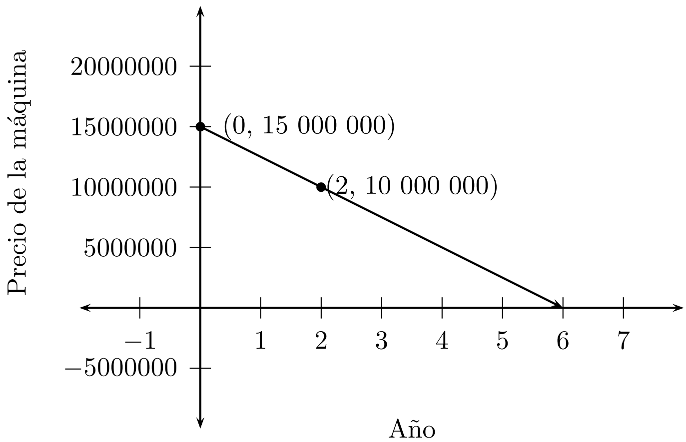
5. Escribir la ecuación: $y = -2\ 500\ 000x + 15\ 000\ 000$.

De esta manera, la ecuación que modela el precio de la máquina es $y = -2\,500\,000x + 15\ 000\ 000$. Con esta ecuación es posible calcular el valor de la máquina en cualquier año. En este caso, se averiguará el precio que tendrá en 2010.

Como al 2010 le corresponde el número 5, entonces, al reemplazar en la ecuación la x por este valor se tiene:

$$\begin{aligned}
y &= -2\ 500\ 000x + 15\ 000\ 000 \\
y &= -2\ 500\ 000(5) + 15\ 000\ 000 \\
y &= -12\ 500\ 000 + 15\ 000\ 000 \\
y &= 2\ 500\ 000
\end{aligned}$$

Luego, para 2010 la máquina costará \$2 500 000 y la correspondiente gráfica es:



Observese que después del 2011 la máquina se habrá depreciado completamente.

■

Ejemplo

Si los ingresos de una empresa por la venta de 5 unidades de cierto artículo son \$140 000 y por 9 son \$260 000, encuentre una expresión matemática que modele los ingresos a cualquier nivel de producción.

Nótese que nuevamente se tienen dos parejas de puntos:

Unidades		Precio de venta
5	$\longrightarrow$	\$140 000
9	$\longrightarrow$	\$260 000

Se determinará entonces la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(5,\ 140\,000)$, $(9,\ 260\ 000)$.

Pasos:

1. Escribir la ecuación general de la recta: $y = mx + b$.

2. Calcular la pendiente: $m = \frac{260\ 000-140\ 000}{9-5} = \frac{120\ 000}{4} = 30\ 000$.

3. Escoger un punto y reemplazarlo junto con la pendiente, en este caso (5, 140 000): $140\ 000 = (30\ 000)(5) + b$.

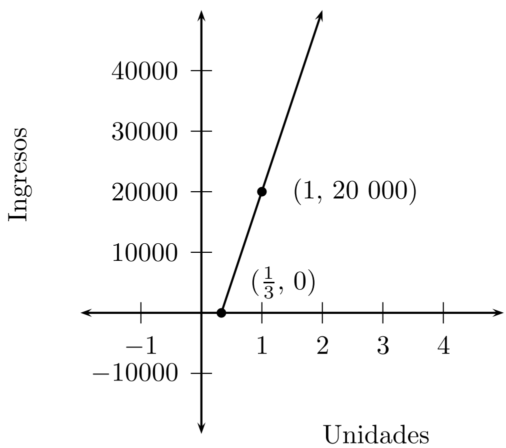
4. Despejar b:

$$\begin{aligned} 140\ 000 &= (30\ 000)(5) + b \\ 140\ 000 &= 150\ 000 + b \\ 140\ 000 - 150\ 000 &= b \\ -10\ 000 &= b \end{aligned}$$

5. Escribir la ecuación: $y = 30\ 000x - 10\ 000$.

Se concluye que la ecuación lineal que modela los ingresos de la empresa es $I = 30\ 000x - 10\ 000$. Se aclara que se escribe I en lugar de y porque en el contexto esta letra representa los ingresos mientras la x son las unidades vendidas.

A continuación se mostrará la representación gráfica de la ecuación de ingresos.



Determinar la ecuación de la recta que modela los ingresos de la empresa es de gran utilidad porque con ella se pueden estimar los ingresos sin saber el precio unitario de cada artículo. Si se observa y analiza la ecuación, la pendiente (30

000) indica que por cada unidad vendida los ingresos aumentan en \$30 000[9] y los \$10 000 que se sustraen indican que la empresa realiza un descuento a sus clientes. ■

2.3.3. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Los sistemas de ecuaciones lineales son sencillamente grupos de ecuaciones que deben satisfacer ciertas condiciones. Existen diversas situaciones en las que son aplicados de forma inconciente pero cuando son formalizados en clase generan un poco de desconcierto porque al resolverlos se requiere tener gran claridad de los temas tratados anteriormente.

Debe aclararse que aquí **no** se expondrán los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones, sino que son preconceptos del lector, ya que se utilizarán para resolver modelos matemáticos de situaciones cotianas.

Considerese una empresa que elabora televisores de 21 pulgadas. Si se sabe que el costo de producir un televisor es de \$205 000 y el precio al público de \$450 000, ¿cuántos televisores debe producir y vender la empresa para obtener un nivel de ganancias de \$6 000 000, cuando los costos fijos son de \$1 500 000?

Antes de resolver el ejercicio se debe comprender claramente el concepto de ganancia, también llamada utilidad. Las ganancias corresponden al dinero que queda después de cancelar los gastos (egresos, costos) que genera la producción de un artículo. Por ello, para calcular la ganacia se sustraen los costos totales de producción del dinero recibido por la venta de dicha mercancía. En otras palabras,

$$Ganancias = Ingresos \ - \ Costos\ totales.$$

Así, para establecer la expresión que representa las ganancias de la empresa, es necesario determinar la expresión matemática que modela tanto a los ingresos como a los costos. Observemos:

Sean

$$\begin{aligned} I &: \text{Ingresos} \\ C_t &: \text{Costos totales} \\ C_f &: \text{Costos fijos} \\ G &: \text{Ganancias} \end{aligned}$$

[9] Recuérdese que la pendiente m es la razón entre los ingresos y las unidades (y son los ingresos y x son las unidades): $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = 30\ 000 = \frac{30\ 000}{1} = \frac{\text{variación de los ingresos}}{\text{variación de las unidades}}$. Como se vio al inicio de estas notas $\frac{30\ 000}{1}$ se interpreta como: por cada unidad vendida los ingresos aumentan en \$30 000.

Entonces,

$I = P_v \times x$

$I = 450\ 000x$

$C_t = c \times x + C_f$

$C_t = 205\ 000x + 1\ 500\ 000$

$$\begin{aligned} G =& \quad I - C_t \\ G =& \quad 450\ 000x - (205\ 000x + 1\ 500\ 000) \\ G =& \quad 450\ 000x - 205\ 000x - 1\ 500\ 000 \\ G =& \quad 245\ 000x - 1\ 500\ 000 \end{aligned}$$

Dado que se desea que las ganancias sean de \$6 000 000, entonces se reemplaza la G en la ecuación $G = 245\ 000x - 1\ 500\ 000$ por $=$ \$6 000 000 y se despeja la incógnita x ya que ésta representa el número de unidades a producir y vender.

$$\begin{aligned} G &= 245\ 000x - 1\ 500\ 000 \\ 6\ 000\ 000 &= 245\ 000x - 1\ 500\ 000 \\ 6\ 000\ 000 + 1\ 500\ 000 &= 245\ 000x \\ 4\ 500\ 000 &= 245\ 000x \\ \frac{4\ 500\ 000}{245\ 000} &= x \\ 18{,}367 &\approx x \end{aligned}$$

Puesto que no es posible producir ni vender 18,367 televisores se debe aproximar este valor a 19, ya que si se aproxima a 18 no se alcanzarían los \$6 000 000 de ganancias solicitado; aunque con los 19 televisores se superan los \$6 000 000, si se cumple con tener las ganancias esperadas.

El trabajo realizado en este ejemplo es una manera de aproximarse a la solución de sistemas de ecuaciones. Supóngase ahora que preguntan por el nivel de producción que hace que la empresa no tenga ganacias. ¿Cuál sería el proceso a desarrollar?

Las ecuaciones son las mismas, así que no se requiere escribirlas de nuevo; lo que sí debe destacarse, y es la diferencia con el ejercicio anterior, son las ganancias. Antes se querían tener ganacias de \$6 000 000 y ahora no se quieren tener ganancias, en otras palabras, $G = 0$ o lo que es igual, los ingresos deben igualar a los costos totales.

$$\begin{aligned} G &= I - C_t \\ 0 &= I - C_t \\ C_t &= I \end{aligned}$$

Con base en lo anterior, existen dos formas de resolver el ejercicio:

Forma 1

$$\begin{aligned}
G &= I - C_t\\
0 &= I - C_t\\
0 &= 245\ 000x - 1\ 500\ 000\\
1\ 500\ 000 &= 245\ 000x\\
\frac{1\ 500\ 000}{245\ 000} &= x\\
6{,}12 &\approx x
\end{aligned}$$

Forma 2

$$\begin{aligned}
G &= I - C_t\\
0 &= I - C_t\\
I &= C_t\\
450\ 000x &= 205\ 000x + 1\ 500\ 000\\
450\ 000x - 205\ 000x &= 1\ 500\ 000\\
245\ 000x &= 1\ 500\ 000\\
x &= \frac{1\ 500\ 000}{245\ 000}\\
x &\approx 6{,}12
\end{aligned}$$

Se concluye entonces que al producir 6 unidades no existen ganancias (de nuevo se aproxima el valor a 6 porque con 7 televisores las ganancias no son nulas).

Si se observa el proceso realizado en la forma 2, de resolución, se utilizó el método de igualación de los sistemas de ecuaciones porque se igualaron los ingresos con los costos totales.

2.4. Ecuación cuadrática

Al igual que las ecuaciones lineales, las cuadráticas permiten representar matemáticamente situaciones del entorno que conducen a realizar análisis y conjeturas respecto a las mismas.

Una ecuación cuadrática en una incógnita, puede escribirse o llevarse a la forma: $0 = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Para resolver ecuaciones cuadráticas con una incógnita, siempre ésta debe estar igualada a cero para que, por medio de la factorización y los productos nulos o por la fórmula cuadrática, se determine el valor de la incógnita.

Ejemplo

Resolvamos las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 = 8$

2. $3x^2 - x = 4$

3. $7x = 5x^2$

4. $3x^2 + x = 2$

Utilizaremos ambas formas de solución, con el fin de recordar el proceso para resolver las ecuaciones.

1. $x^2 = 8$

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{8}$	Propiedad de la igualdad.
$(x^2)^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{8}$	Propiedad de los radicales.
$x = \pm\sqrt{8} = \pm\sqrt{2^2 2} = \pm 2\sqrt{2}$	Propiedad de los exponentes.

2. $3x^2 - x = 4$

$3x^2 - x - 4 = 0$	Sustraemos el 4 a lado y lado del igual.
$(x+1)(3x-4) = 0$	Reemplazamos la ecuación por la factorización de $3x^2 - x - 4$.
$(x+1) = 0$ o $(3x-4) = 0$	Aplicamos la propiedad de los productos nulos.
$x = -1$ o $x = \frac{4}{3}$	Resolvemos cada ecuación lineal.

3. $7x = 5x^2$

$5x^2 - 7x = 0$	Dejamos a un sólo lado los términos con x.
$x(5x-7) = 0$	Factorizamos.
$x = 0$ o $5x - 7 = 0$	Aplicamos la propiedad de los productos nulos.
$x = 0$ o $x = \frac{7}{5}$	Resolvemos cada ecuación.

4. $3x^2 + x = 2$

$3x^2 + x - 2 = 0$	Igualamos a cero la expresión.
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(3)(-2)}}{6}$	Aplicamos fórmula cuadrática.
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{6}$	Operamos.
$x = \frac{-1 \pm 5}{6}$	Operamos.
$x = \frac{2}{3}$ o $x = -1$	Operamos.

■

2.5. Análisis de situaciones

Situación 1:

En el estudio del comportamiento del mercado se encuentra que en ocasiones el precio de venta de un artículo no es fijo, es decir, es usual encontrar situaciones como: si alguien vende tres unidades se realiza un descuento, si vende 6 podría aplicarse otro descuento y así sucesivamente. Por ello, el precio de un artículo puede expresarse como:

$$p_v = 1\ 000x - 50x = 9\ 950x$$

Dicho de otra forma, el precio de un artículo es de \$1000, con un descuento de \$50 por cada unidad vendida.

Como el precio ahora es una expresión matemática, si se determinan los ingresos se encuentra que éstos son una ecuación, como la siguiente:

$$\begin{aligned} I &= p_v x \\ I &= (9\ 950x)x \\ I &= 9\ 950x^2 \end{aligned}$$

Ahora, si se asume que los ingresos son de \$4 975 000, ¿cuántas unidades deben venderse para lograr obtener dichos ingresos?

Para responder la pregunta reemplazamos la letra I por el valor numérico \$4 975 000; con lo cual se obtiene una ecuación cuadrática, observe que la expresión resultante satisface todas las condiciones para ser ecuación cuadrática.

$$\begin{aligned} I &= 9\ 950x^2 \\ 4\ 975\ 000 &= 9\ 950x^2 \\ 0 &= 9\ 950x^2 - 4\ 975\ 000 \end{aligned}$$

Ahora podemos resolver la ecuación:

$$\begin{aligned}
4\ 975\ 000 &= 9\ 950x^2 \\
\frac{4\ 975\ 000}{9\ 950} &= x^2 \\
\sqrt{\frac{4\ 975\ 000}{9\ 950}} &= \sqrt{x^2} \\
\pm\sqrt{500} &= x \\
\pm 23 &\approx x
\end{aligned}$$

Tenga en cuenta que se escribe $\pm$ porque toda raíz cuadrada la satisface un valor negativo y uno positivo. Recuérdese que la raíz cuadrada de un número es aquel número que al multiplicarse por si mismo da el valor dentro de la raíz.

Ejemplo

La raíz cuadrada de 4 es:

$$\sqrt{4} = \pm 2 \text{ porque } (-2)^2 = 4 \text{ y } 2^2 = 4$$

■

Así, concluimos que deben venderse alblackedor de 23 unidades para lograr unos ingresos de \$4 975 000, cuando el precio unitario del artículo es \$9 950.

Situación 2:

Supóngase que los ingresos de una empresa están dados por la ecuación

$$I = 3\ 500x - x^2$$

¿Cuál es el número de unidades que deben venderse para que los ingresos sean de \$2 000 000?

Para resolver el ejercicio reemplazamos la I por \$2 000 000. Se establece una ecuación cuadrática y se usa la fórmula cuadrática para hallar el valor de la incógnita.

$$\begin{aligned}
I &= 3\ 500x - x^2 \\
2\ 000\ 000 &= 3\ 500x - x^2 \\
0 &= -x^2 + 3\ 500x - 2\ 000\ 000 \\
x &= \frac{-3\ 500 \pm \sqrt{(-3\ 500)^2 - 4(-1)(-2\ 000\ 000)}}{2(-1)}
\end{aligned}$$

$$x = \frac{-3\ 500 \pm \sqrt{12\ 250\ 000 - 8\ 000\ 000}}{-2}$$
$$x = \frac{-3\ 500 \pm \sqrt{4\ 250\ 000}}{-2}$$
$$x \approx \frac{-3\ 500 \pm 2\ 062}{-2}$$

$$x \approx \frac{-3\ 500 + 2062}{-2} \quad \text{o} \quad x \approx \frac{-3\ 500 - 2062}{-2}$$
$$x \approx \frac{-1\ 438}{-2} \quad \text{o} \quad x \approx \frac{-5\ 562}{-2}$$
$$x \approx 719 \quad \text{o} \quad x \approx 2\ 781$$

De este modo, decimos que con 719 y con 2 781 unidades se obtienen ingresos de \$2 000 000.

Con lo anterior se evidencia lo útil que es saber resolver una ecuación cuadrática.

téngase en cuenta que, a pesar de que la expresión de ingresos tiene en la incógnita x un cuadrado, ésta no es una ecuación cuadrática, porque para serlo requiere estar igualada a cero y tener sólo una incógnita.

Con esto terminamos el capítulo correspondiente al uso y las aplicaciones de las ecuaciones, en particular las lineales, cuadráticas y los sistemas de ecuaciones. Refuerce estos conceptos con los siguientes ejercicios.

2.6. Actividades de práctica

1. Clasifique las siguientes expresiones algebraicas en polinómicas y no polinómicas.

   a) $6x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}} - 3xy + 9$
   b) $\sqrt{3}x^2 - 3x^5 - 10x + 7$
   c) $wy^{\frac{5}{4}} - \sqrt{3}w^{\frac{2}{7}} - \frac{3}{4}wy + 17$
   d) $\sqrt{xz} + 3x - 2z$
   e) $x^2y - 9x + 7x^3y^5 - 2xy^6$
   f) $9x^{200} + 11x - 1$

2. Determine el grado de los siguientes polinomios.

    a) $6xy^7 - 5xy + 9x$
    b) $\sqrt{8}w^4 - 3w^3 - 86w^8 + 2w - 1$
    c) $y^4z - 2zy + 8z^7y$
    d) $2 - x^2 + x^9x^10$
    e) $\sqrt{7}x^5 + 7xy - 8$
    f) $12x^2 + 6x$

3. Realice las siguientes operaciones.

    a) $7xy^2 + x^2y - 91y^2x - 5yx^2 + 9$
    b) $(5xp + 12x^3q) - (-5x^3q - 8xp)$
    c) $-38 - 4x(3 - x) + 9x - 6x(2 - 2x)$
    d) $\frac{2}{3}w^2v - 412vw - 6vw^2 + 3w(7 - 4v) + 8$
    e) $(11x^4 - 7x^2 - 9)(x - 1) + (x - 3)(x^2 - 3)$
    f) $(8y^5 + 6y - 1) \div (y^3 - 1)$
    g) $(4z^6 - 3z^5 + 2z^4 + 8z - 1) \div (z + 2)$

4. Factorice los siguientes polinomios.

    a) $x^3 + x + x^2 + 1$
    b) $a^3 + a^2 + a^2b - b^2$
    c) $4z^2 - 8z - 5$
    d) $6x^2 + 11x - 2$
    e) $14w^3 - 23w^2 - 11w + 2$
    f) $3x^2 - 4$
    g) $(y - 2)^2 - (y + 1)^2$
    h) $(a - b)^2 - (a + b)^2$
    i) $x^3 + 4x^2 + 8x + 8$
    j) $x^3 - 8$
    k) $8x^3 - 1$
    l) $343q^3 - 64$

5. Factorice y simplifique las siguientes operaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x-1}{x^2-x-2} \cdot \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}$

b) $\dfrac{7x^2+27x-4}{x^2-4x+4} \div \dfrac{x+4}{x-2}$

c) $\dfrac{2x^2+7x+3}{2x^2-3x-2}$

d) $\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2-4} \div \dfrac{x-2}{24x-8}$

a) $\dfrac{x}{2x^2-x-3} + \dfrac{3}{2x^3-5x^2-x+6}$

b) $\dfrac{-4x+1}{x^2+2x-3} - \dfrac{8x}{2x^2+x-3}$

c) $\dfrac{x}{x^3-9x^2+2x+48} + \dfrac{-2x+3}{x^2-4} - \dfrac{x-1}{5x^2-45}$

d) $\dfrac{3x}{x^2-x-2} - \dfrac{x-4}{2x^3-x^2-5x-2} + \dfrac{8}{4x^3+4x^2-5x-3}$

e) $\dfrac{1+\frac{1}{y}}{\frac{y}{y-2}} + \dfrac{\frac{3x}{4}+\frac{y}{x}}{\frac{3x^2-1}{4x}}$

f) $\dfrac{3x-1}{\frac{1}{x}+2} - \dfrac{2x+\frac{3}{y}}{\frac{y}{x}}$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $\dfrac{3}{2}x-8=\dfrac{1}{5}$

b) $-7x+14=\dfrac{6}{7}$

c) $\dfrac{3x-8}{x}=\dfrac{x-2}{x}$

d) $\dfrac{x^2}{2-x}=\dfrac{x^2}{5}$

e) $16x^2-46x+15=0$

f) $x^2+2x=3$

g) $x^2-9=0$

h) $10x^2+19x=15$

i) $x^2=6x-9$

7. Plantee una ecuación que represente cada una de las siguientes expresiones.

- Los costos totales de este año en la empresa se blackujeron a la tercera parte.____________________

- Las ganancias de este mes aumentaron en \$1 000 000, respecto al mes pasado.____________________

- La máquina de empacado en una fábrica tardó el triple del tiempo que demora su nueva versión x-2000.____________________

- Ana realizó un pedido para su almacén de electrodomésticos; en él, ella pidió cuatro veces la cantidad que había solicitado el mes anterior de la nevera con referencia zw-101 y, adicionalmente solicitó la cuarta parte respecto al mes anterior, de la nevera con referencia zw-105.____________________

8. ¿Cuál de las expresiones dadas representa el contexto planteado?

   La máquina gastó el doble de tiempo de lo usual.

   Si $x =$: tiempo usual que tarda la máquina en hacer su trabajo.

   $$x^2 \qquad 2x \qquad \frac{x}{2}$$

9. Considere el anterior ejercicio y suponga que el tiempo que tarda usualmente la máquina es 20 minutos,

   - ¿Cuánto es el doble de este tiempo? ____________________
   - Escriba la operación que realizó. ____________________
   - ¿Coincide esta operación con la que indicó en el ejercicio 2? Justifique su respuesta.____________________

10. Los ingresos de una empacadora de arroz, por libras, fueron de \$10 000 000 cierto mes. Si el precio de empaque de una libra es de \$400, ¿cuántas libras se empacaron? Escriba la expresión que utilizó para encontrar la respuesta.

    ____

11. Los costos fijos de una empresa son de \$1 700 000. Si los costos variables e ingresos de la empresa se indican en las siguientes tablas, respectivamente, realice lo que indica cada item.

Cantidades	**Costos variables**
0	1 700 000
12	1 682 000
32	1 652 000

Cantidades	**Ingresos**
4	12 800
15	48 000
32	102 400

- Represente gráficamente los datos expuestos en la tabla de los costos totales.
- Represente gráficamente los datos que aparecen en la tabla de los ingresos.
- Una el primer y el último punto que dibujó en cada gráfica.
- Con los puntos que unió en la gráfica de los costos totales, encuentre la ecuación lineal que representa la relación entre los costos y las unidades producidas. Escriba todo el proceso.____________________
- Con los puntos que unió en la gráfica de los ingresos, encuentre la ecuación lineal que representa la relación entre los ingresos y las unidades producidas. Escriba todo el proceso.____________________
- ¿Por qué es útil determinar las anteriores ecuaciones? Justifique su respuesta.____________________

12. Con base en las gráficas que elaboró en el anterior ejercicio, responda las siguientes preguntas.
    - ¿Los costos tienden a aumentar o a disminuir? Justifique su respuesta.____________________
    - ¿Los ingresos tienden a aumentar o a disminuir? Justifique su respuesta.____________________
    - ¿La gráfica de los ingresos presenta más crecimiento que la de costos? Justifique su respuesta.____________________
    - ¿Qué le indica la pendiente de cada ecuación lineal (la de costos, la de ingresos)? Interprétela.____________________

13. Si los costos de una empresa están dados por la expresión $I = 50\ 000x - 200x^2$, responda:

- ¿Cuántas unidades deben producirse para que los ingresos sean \$48 000?

- ¿Cuántas unidades deben producirse para que los ingresos sean de \$70 500?

- ¿Cuántas unidades deben producirse para que los ingresos sean \$10 000?

Capítulo 3

Funciones

En este capítulo estudiaremos situaciones del entorno en las cuales se evidencia la aplicabilidad del concepto de función, éstas hacen referencia a la variabilidad de los términos involucrados en un contexto.

Una función conduce al modelamiento de una situación y tiene una de sus características importantes es que permite observar la dependencia de ciertas cantidades frente a otras.

3.1. Función

Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto uno y sólo un elemento de otro conjunto.

Ejemplo

Consideremos un grupo de tres personas y llamemos al conjunto que contiene los nombres de ellas N,

$$N = \{Ana, Luis, Jaime\}.$$

Ahora formemos el conjunto con el peso de ellos y notémoslo con la letra P,

$$P = \{65,\ 77,\ 80\}$$

Si f es la función que asigna a cada persona su correspondiente peso tenemos que:

$$\begin{array}{lcl} f : Nombre & \rightarrow & Peso \\ \quad Ana & \rightarrow & 65 \\ \quad Luis & \rightarrow & 77 \\ \quad Jaime & \rightarrow & 80 \end{array}$$

Así, $f(Ana) = 65$, $f(Luis) = 77$ y $f(Jaime) = 80$. Como se observa una función es sencillamente una asignación con la característica de sólo poder asignar a un elemento uno y sólo un elemento.

■

Una función tiene asociados a ella los conceptos de variable dependiente e independiente, dominio y rango. Analicemos dichos conceptos.

En el ejemplo anterior la variable independiente corresponde a los nombres de las personas Ana, Luis y Jaime, mientras que las variables dependientes son 65, 77 y 80. Obsérvese que el peso **depende** de la persona que se considere mientras que la persona **no depende** del peso (los nombres son independientes). Cuando se esté analizando alguna situación lo primero que debe identificarse es cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

El dominio de una función es el conjunto elementos o valores que toma la variable independiente, y el rango es el conjunto de valores que toma la variable dependiente.

Para el ejemplo tratado, el dominio de la función dada es el conjunto de los nombres, es decir $N = \{Ana, Luis, Jaime\}$ y el rango corresponde al conjunto $P = \{65,\ 77,\ 80\}$.

Es importante reconocer en cualquier ejercicio el dominio y el rango de la función para con ellos establecer adecuadamente los parámetros bajo los cuales se rige el contexto.

Para comprender mejor todo lo anterior vamos a estudiar las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales, y en ellas, se caracterizarán o presentarán más contextualizados dichos conceptos.

3.2. Función lineal

Una función es lineal si es de la forma $f(x) = ax+b$ siendo a y b números reales. Cuando se escribe $f(x)$ se hace referencia a una notación, **no se está multiplicando la f con la** x, que indica que f depende de x, en otras palabras, esto nos dice que todo cambio en f es causado por algún cambio que tuvo x.

Otro aspecto importante es el que se refiere a evualuar una función; cuando se dice **evalúe** f en 2, por ejemplo, indica que se debe reemplazar la x por el 2 en todas las expresiones donde aparezca x en f.

Para establecer una función lineal es necesario tener en la información dada, la seguridad de que existen las variables dependiente e independiente y debemos observar la variabilidad lineal.

Cuando nos encontramos en un contexto de función lineal, por lo general, tenemos tablas de datos que gráficamente serán parejas de puntos en el plano. De esta manera, con tan sólo dos puntos o dos parejas de datos de la información dada podremos establecer la función lineal, de igual manera que cuando hablabamos de ecuación lineal en términos de x e y, con la diferencia de que ahora los valores que toma y es decir $f(x)$ son variables (cambian, no son fijos como en la ecuación lineal).

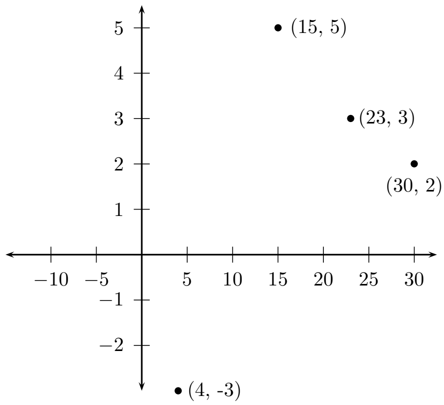
Si no se dan dos puntos o parejas de datos, entonces se debe dar la razón de cambio de la variable dependiente respecto a la independiente y una sola pareja de datos. Veamos.

Ejemplo

Si x es la variable independiente de una función lineal y se sabe que ésta se constituye con las parejas de puntos “mayor ”y “menor”de la siguiente tabla, establecer la función lineal.

Hablar de la pareja “mayor”y “menor”no es muy claro, porque esta idea no es tan exacta a la de mayor y menor en matemáticas, pero con los datos de la tabla trataremos de explicarlo.

x	4	15	23	30
$f(x)$	-3	5	3	2



■

Ejemplo

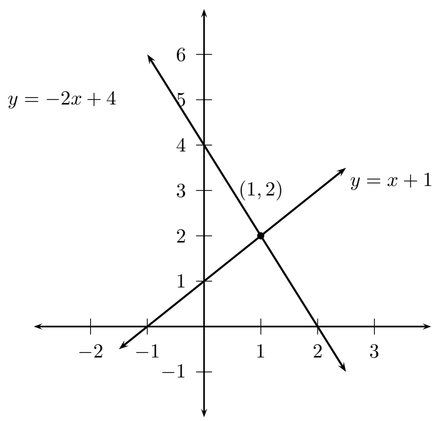
Encontremos el punto de intersección de las rectas que tienen ecuaciones $y = x + 1$ y $y = -2x + 4$ repectivamente.

Solución:

Tenemos que resolver las ecuaciones dadas simultáneamente. Al sustituir el valor y dado en la primera ecuación dentro de la segunda,obtenemos:

$$x + 1 = -2x + 4 \;\Rightarrow\; 3x = 3 \;\Rightarrow\; x = 1$$

Al sustituir este valor de x en una de las ecuaciones dadas, se tiene que $y = 2$; por tanto, el punto de intersección buscado es $(1, 2)$



■

3.3. Función cuadrática

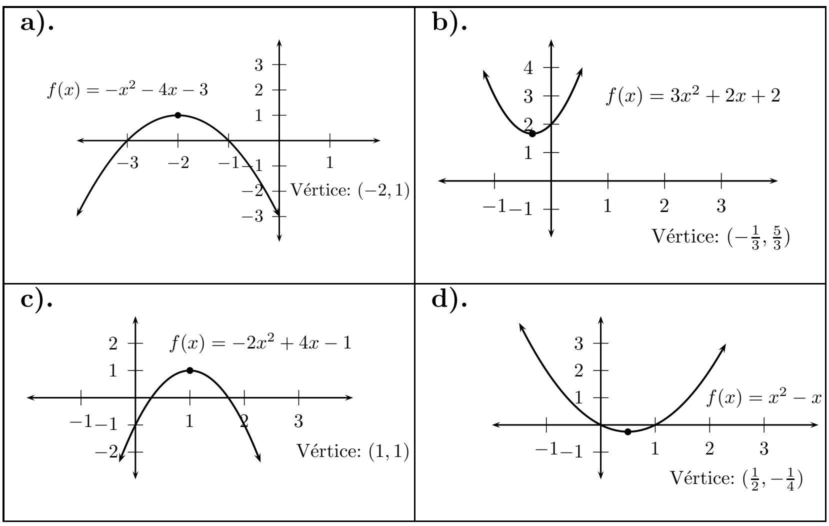
Una función es cuadrática si es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c números reales y $a \neq 0$.

El dominio de una función cuadrática es $\mathbb{R}$.

Por ejemplo, las siguientes son funciones cuadráticas:

1. $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ con $a = -1$, $b = -4$, $c = -3$
2. $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$ con $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$
3. $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ con $a = -2$, $b = 4$, $c = -1$
4. $f(x) = x^2 - x$ con $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$

La gráfica de una función cuadrática corresponde a una parábola; a continuación se muestra la gráfica de las funciones del ejemplo anterior:



En estas gráficas observamos que unas parábolas abren hacia arriba (segunda y cuarta) y otras abren hacia abajo (primera y tercera), esto se debe al signo de a, luego si a es positivo ($a > 0$) la parábola abre hacia arriba, y si a es negativo ($a < 0$) la parábola abre hacia abajo.

En el primer caso, es decir, cuando la parábola abre hacia arriba, esta función alcanza un valor mínimo en el vértice que a su vez está dado por la pareja:

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

En caso contrario, cuando la parábola abre hacia abajo, el vértice corresponde al punto máximo de la función.

A continuación, describiremos cuidadosamente la forma como se construyó la gráfica de la primera función (queda como ejercicio para el estudiante analizar las demás).

La función es $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ con $a = -1$, $b = -4$, $c = -3$, como $a < 0$ la parábola abre hacia abajo, el vértice que en este caso corresponde al punto máximo se obtiene reemplazando en la fórmula $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ los valores de a, b, y c respectivamente, entonces tenemos:

Vértice: $\left(-\frac{-4}{2(-1)}, f\left(-\frac{-4}{2(-1)}\right)\right) = (-2, f(-2)) = (-2, 1)$.
Dado que $f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) - 3 = 1$

La gráfica corta al eje x en dos puntos; que los encontramos igualando la función a cero y resolviendo la ecuación resultante:

$-x^2 - 4x - 3 = 0$	$f(x) = 0$
$x^2 + 4x + 3 = 0$	multiplicamos a ambos lados de la igualdad por -1
$(x+3)(x+1) = 0$	factorizamos

De esta manera obtenemos que los valores de x que satisfacen la ecuación: $f(x) = 0$ son $x = -3$ y $x = -1$; esto significa que $f(-3) = 0$ y $f(-1) = 0$.

Si $a > 0$ entonces $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un **mínimo** en

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) \tag{3.1}$$

Si $a < 0$ entonces $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un **máximo** en

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) \tag{3.2}$$

3.4. Funciones exponencial y logarítmica

Las funciones exponenciales tienen un papel importante en el análisis matemático. Debido a sus características especiales, son de las funciones más útiles que aparecen en casi todo campo de aplicación de las matemáticas.

3.4.1. Función exponencial

Una función exponencial es de la forma:

$$f(x) = a^x \qquad\qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

donde a debe ser un número positivo ($a > 0$) y x es cualquier número real.

Se dice que $f(x)$ es una función exponencial con base a y exponente x.

Observemos que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales, como $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la imagen de la función exponencial es el conjunto de los números reales mayores a 0 ($\mathbb{R}^+$). Entonces;

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

Para tener en cuenta:

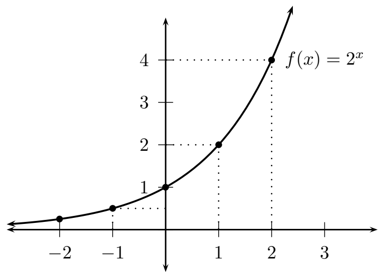
1. La restricción $a > 0$ es indispensable; supongamos por ejemplo que a es cero o un número negativo, entonces se presentarían algunas expresiones no definidas en los números reales, tales como $0^{-1},\ (-1)^{\frac{1}{2}},\ 0^0$, etc.
2. El caso $a = 1$ no lo tenemos en cuenta, debido a que en este caso se tiene $1^x = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y 1^x es una función constante, cuya gráfica es una recta horizontal paralela al eje x que pasa por el punto $(0, 1)$.

Ejemplo

La función exponencial con base 2 es la función $f(x) = 2^x$, cuyo dominio es el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Observemos algunos valores que la función toma para ciertos valores de x:

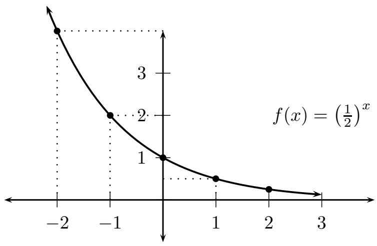
x	$f(x)$
0	$f(0) = 2^0 = 1$
1	$f(1) = 2^1 = 2$
-1	$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
-2	$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
2	$f(-2) = 2^2 = 4$
3	$f(3) = 2^3 = 8$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$



■

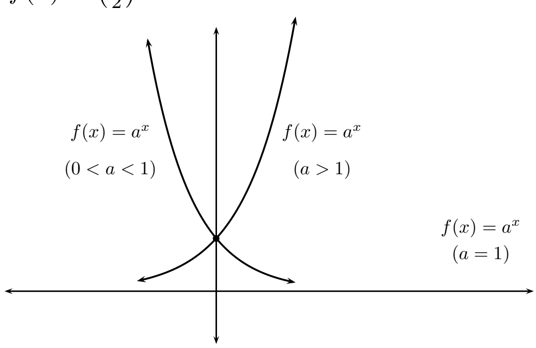
Ahora, tomemos la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y los mismos valores para x que usamos en la función anterior:

x	$f(x)$
0	$f(0) = \frac{1}{2}^0 = 1$
1	$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
-1	$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
-2	$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
2	$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
3	$f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$



Las funciones $y = 2^x$ y $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, cuyas gráficas se presentaron en el ejemplo anterior, son casos particulares de la función exponencial $y = f(x) = a^x$, obtenidos al hacer $a = 2$ y $a = \frac{1}{2}$, respectivamente.

En general la función exponencial $y = f(x) = a^x$ con $a > 1$ tiene una gráfica similar a la de $y = 2^x$, mientras que la gráfica de $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ es similar a la de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



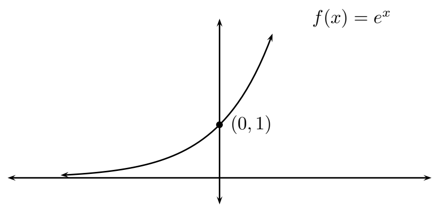
Función exponencial con base e

Un caso particular de la función exponencial es la función cuya base es el número e o número Euler, $e = 2{,}7182818...$, es decir $f(x) = e^x$

Para trazar la gráfica de $y = f(x) = e^x$, partimos del hecho de que $e > 1$, por propiedades de la función exponencial tenemos que la gráfica de $y = e^x$ es similar a la gráfica de $y = 2^x$. Con ayuda de la calculadora obtenemos la siguiente tabla.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0,05	0,14	0,37	1	2,72	7,39	20,09

La gráfica de $y = e^x$ aparece en la siguiente figura.



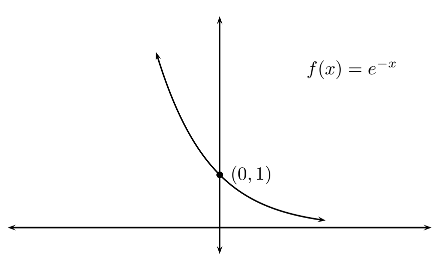
Ejemplo

Tracemos la gráfica de la función $y = e^{-x}$

Como $e > 1$, implica $0 < \frac{1}{e} < 1$, de modo que $f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ es una función exponencial con base menor que 1. Por tanto, tiene una gráfica similar a la de la función exponencial $y = (1/2)^x$. Con ayuda de la calculadora obtenemos la siguiente tabla.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	20,09	7,39	2,72	1	0,37	0,14	0,05

Veamos entonces la gráfica:



■

También podemos emplear la función exponencial para resolver ecuaciones, mediante el uso apropiado de las propiedades de los exponentes; estas propiedades facilitan los cálculos que comprenden exponenciales. Aunque ya se establecieron dichas propiedades en el capítulo 1, las enunciaremos de nuevo para recordarlas.

Propiedades de los exponentes

Sean a y b dos números positivos y x y y números reales. Entonces,

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Ejemplo

Si $f(x) = 2^{2x-1}$ ¿Cómo determinamos el valor de x, para el cual $f(x) = 16$?

Hay que resolver la ecuación: $2^{2x-1} = 16$.

Observemos que en lado izquierdo de la ecuación tenemos un exponencial de base 2, luego podemos expresar a 16 como 2^4 y de esta manera la ecuación se convierte en: $2^{2x-1} = 2^4$.

Esta ecuación se cumple si y sólo si $2x - 1 = 4$ dado que en ambos casos se tiene la misma base (2) y se sabe además que si $b^m = b^n \Rightarrow m = n$, entonces, resolviendo tenemos que $x = \frac{5}{2}$.

■

3.4.2. Función logarítmica

En la sección anterior vimos que una ecuación exponencial es de la forma:

$$b^y = x \qquad (b > 0, b \neq 1,)$$

donde la variable x se expresa en términos de un número real b y una variable y. ¿Pero cómo despejar y en esta ecuación? y se llama el **logaritmo de x en base b** y se denota como $\log_b x$. Entonces, es el exponente al que debe elevarse la base b para obtener el número x.

$$\boxed{y = \log_b x \qquad \text{sí y sólo sí} \qquad x = b^y \qquad (x > 0)}$$

Observemos que el logaritmo $\log_b x$ se define sólo para valores positivos de x.

Ejemplos

1. $\log_{10} 100 = 2$ pues $100 = 10^2$
2. $\log_5 125 = 3$ pues $125 = 5^3$
3. $\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = -3$ pues $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$
4. $\log_{20} 20 = 1$ pues $20 = 20^1$
5. Despejar x en cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) $\log_3 x = 4$ *b*) $\log_{16} 4 = x$ *c*) $\log_x 8 = 3$

Resolvamos cada uno de los ejercicios.

a) Por definición, $\log_3 x = 4$ significa que $x = 3^4 = 81$.

b) $\log_{16} 4 = x$ es equivalente a $4 = 16^x = (4^2)^x = 4^{2x}$, o $4^1 = 4^{2x}$, de lo cual se deduce que

$$\begin{aligned} 2x &= 1 \qquad (b^m = b^n \ \Rightarrow \ m = n) \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) Si se blackuce de nuevo a la definición, se ve que la ecuación $\log_x 8 = 3$ equivale a

$$\begin{aligned} 8 &= x^3 \\ 2^3 &= x^3 \\ x &= 2 \qquad (a^m = b^m \ \Rightarrow \ a = b) \end{aligned}$$

Los dos sistemas de logaritmos más usados son el sistema de **logaritmos comunes**, cuya base es el número 10, y el sistema de **logaritmos naturales**, cuya base es el número irracional $e = 2{,}71828...$ Además, la práctica común es escribir log en vez de $\log_{10}$ y ln en lugar de $\log_e$.

$$\log x = \log_{10} x \qquad \text{Logaritmo común}$$

$$\ln x = \log_e x \qquad \text{Logaritmo natural}$$

■

Propiedades de los logaritmos

Si m y n son número positivos, entonces,

1. $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$
2. $\log_b \left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$
3. $\log_b m^n = n \log_b m$
4. $\log_b 1 = 0$
5. $\log_b b = 1$

No hay que confundir la expresión $\log_b \left(\frac{m}{n}\right)$ (propiedad 2) con la expresión $\frac{\log m}{\log n}$; por ejemplo,

$$\log_b \left(\frac{100}{10}\right) = \log 100 - \log 10 = 2 - 1 = 1 \neq \frac{\log 100}{\log 10} = \frac{2}{1} = 2$$

Ejemplos

1. Los siguientes ejemplos ilustran las propiedades de los logaritmos.

   a) $\log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$
   b) $\ln \frac{5}{3} = \ln 5 - \ln 3$
   c) $\log \sqrt{7} = \log 7^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 7$
   d) $\log_5 1 = 0$
   e) $\log_{45} 45 = 1$

2. Desarrollemos y simplifiquemos las siguientes expresiones.

   a) $\log_3 x^2 y^3$ *b*) $\log_2 \frac{x^2+1}{2^x}$ *c*) $\ln \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{e^x}$

Solución

a)	$\log_3 x^2 y^3$	$= \log_3 x^2 + \log_3 y^3$	Propiedad 1
		$= 2\log_3 x + 3\log_3 y$	Propiedad 3
b)	$\log_2 \frac{x^2+1}{2^x}$	$= \log_2(x^2+1) - \log_2 2^x$	Propiedad 2
		$= \log_2(x^2+1) - x\log_2 2$	Propiedad 3
		$= \log_2(x^2+1) - x$	Propiedad 5
c)	$\ln \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{e^x}$	$= \ln \frac{x^2(x^2-1)^{1/2}}{e^x}$	Reescribiendo
		$= \ln x^2 + \ln(x^2-1)^{\frac{1}{2}} - \ln e^x$	Usamos propiedades 1 y 2
		$= 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) - x\ln e$	Usamos propiedad 3
		$= 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) - x$	Usamos propiedad 5

1. Despejar x en $\log_3(x+1) - \log_3(x-1) = 1$.

   Al aplicar las propiedades de los logaritmos obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \log_3(x+1) - \log_3(x-1) &= 1 & \\ \log_3 \frac{x+1}{x-1} &= 1 & \text{Por propiedad 2} \\ \frac{x+1}{x-1} &= 3^1 & \text{Por definición de logaritmo} \end{aligned}$$

   y entonces,

$$\begin{aligned} x+1 &= 3(x-1) \\ x+1 &= 3x-3 \\ 4 &= 2x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

2. Resolvamos $\log x + \log(2x-1) = \log 6$.
   tenemos:

$\log x + \log(2x-1) = \log 6$	
$\log x + \log(2x-1) - \log 6 = 0$	Pasamos todo al lado izquierdo de la igualdad para igualar a cero.
$\log\left[\frac{x(2x-1)}{6}\right] = 0$	Usamos propiedades 1 y 2
$\frac{x(2x-1)}{6} = 10^0 = 1$	Por definición de logaritmo

   ■

   Así,

$$\begin{aligned} x(2x-1) &= 6 \\ 2x^2 - x - 6 &= 0 \\ (2x+3)(x-2) &= 0 \\ x &= -\frac{3}{2} \qquad \text{ó} \qquad x = 2 \end{aligned}$$

Como el dominio de log es el conjunto de los reales positivos, se rechaza la raíz $-3/2$ de la ecuación cuadrática y se concluye que la solución de la ecuación dada es $x = 2$. ■

Representación gráfica de la función logarítmica

Si b y n son números positivos y b es diferente de 1, entonces la expresión $\log_b n$ es un número real. Esto permite plantear una función logarítmica así:

$$f(x) = \log_b x \qquad (b > 0,\ b \neq 1)$$

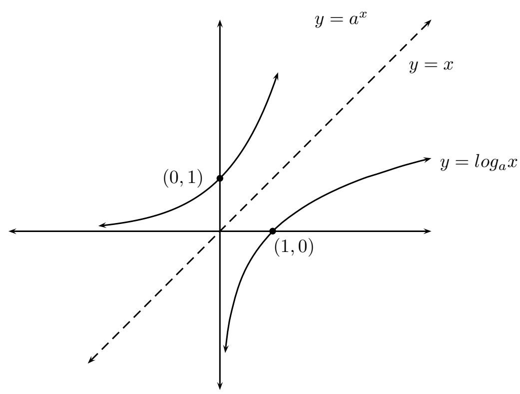
y se llama **función logarítmica con base** b. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales positivos.

Una forma de obtener la gráfica de $y = \log_b x$ es construir una tabla de valores del logaritmo (en base b). Sin embargo, un método más sencillo y útil consiste en usar la relación entre las funciones logarítmicas y exponenciales.

Si un punto $(x,\ y)$ está en la gráfica de $y = \log_b x$, entonces, $y = \log_b x$, sin embargo, también se puede escribir esta ecuación en forma exponencial como: $x = b^y$, de modo que el punto (y, x) está en la gráfica de la función $y = b^x$.

Ahora analizaremos la relación entre los puntos (x, y), (y, x) y la recta $y = x$.

Si suponemos que esta recta es un espejo, entonces el punto (y, x) es el reflejo del punto x, y. De manera análoga, el punto (x, y) es el reflejo del punto (y, x). Esta relación se puede utilizar para trazar la gráfica de las funciones logarítmicas; de esta manera, si deseamos trazar la gráfica de $y = \log_b x$, donde $b > 1$, basta trazar el reflejo de la gráfica $y = b^x$ con respecto de la recta $y = x$.



Propiedades de la función logarítmica

La función logarítmica $y = \log_b x$ ($b > 0$, $b \neq 1$) tiene las siguientes propiedades.

1. Su dominio es el intervalo $(0, \infty)$.
2. Su imagen es el intervalo $(-\infty, \infty)$.
3. Su gráfica pasa por el punto $(1, 0)$.
4. Su gráfica es una curva continua, sin agujeros ni saltos.
5. Su gráfica sube de izquierda a derecha si $b > 0$ y baja de izquierda a derecha si $0 < b < 1$.

Propiedades que relacionan las funciones exponenciales y logarítmicas

La relación existente entre la función exponencial $f(x) = e^x$ y la función logarítmica $g(x) = \ln x$ se describe mediante las siguientes propiedades.

1. $e^{\ln x} = x \qquad (x > 0)$
2. $\ln e^x = x \qquad$ (para cualquier número x)

Las relaciones expresadas anteriormente son útiles para resolver ecuaciones que abarcan exponenciales y logaritmos.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $2e^{x+2} = 5$.

Primero dividimos ambos lados de la ecuación entre 2 para obtener

$$e^{x+2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Ahora, aplicamos el logaritmo natural (ln) a cada lado de la ecuación y usamos la segunda propiedad para obtener

$$\ln e^{x+2} = \ln 2{,}5 \implies x + 2 = \ln 2{,}5 \implies x = -2 + \ln 2{,}5 \approx -1{,}08$$

■

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $5 \ln x + 3 = 0$.

Al sumar -3 a los dos lados de la igualdad obtenemos

$$5 \ln x = -3 \;\Rightarrow\; \ln x = -\frac{3}{5} = -0{,}6$$

y entonces,

$$e^{\ln x} = e^{-0{,}6}$$

Usamos la primer propiedad para concluir que

$$x = e^{-0{,}6} \approx 0{,}55$$

■

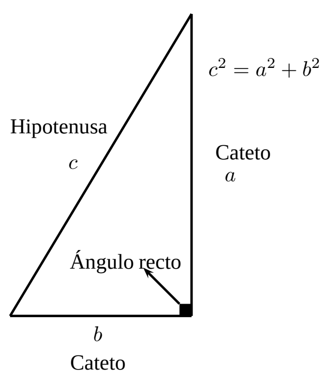
Tema adicional

A continuación mencionaremos otro tipo de funciones conocidas con el nombre de funciones trigonométricas, que aunque no se aplican directamente en el contexto económico si se hace necesario su conocimientos para calcular algunas integrales en el capítulo 6.

Para empezar mencionaremos algunos aspectos importantes que se deben tener en cuenta al momento de estudiar las funciones trigonometrícas.

Cuando conocemos las medidas de algunas de las componentes de un triángulo, la trigonometría nos ayuda a determinar las restantes; por ejemplo, si conocemos las medidas de dos de los lados de un triángulo, por medio de la trigonometría podemos calcular el valor del tercer lado.

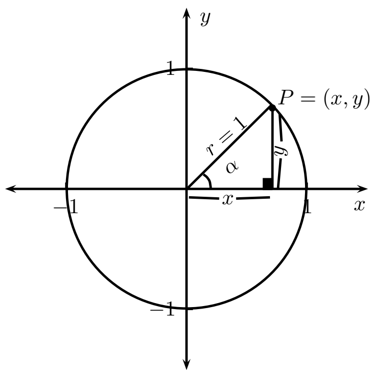
Recordemos que el Teorema de Pitágoras afirma que: en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, como se observa a continuación.



Hablamos de hipotenusa y catetos de un triángulo únicamente cuando tenemos un triángulo rectángulo, es decir, un rectángulo que tiene un ángulo recto (mide 90 grados).

3.5. Funciones trigonométricas

Consideremos un punto P en la circunferencia unitaria (es una circunferencia de radio uno, con su centro en el origen $(0,0)$ de un sistema de coordenadas cartesianas).



Si P es un punto del primer cuadrante, entonces x e y son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa tiene longitud 1. Aplicando el Teorema de Pitágoras, x e y satisfacen la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Si (x, y) es un punto de la circunferencia unitaria, y el radio que tiene origen en $(0, 0)$, forma un ángulo α, con el eje x, las principales funciones trigonométricas se pueden definir sobre los valores del ángulo α así:

3.5.1. Función seno

El seno es la razón entre el cateto opuesto (y) al ángulo α y la hipotenusa 1, entonces,

$$sen\alpha = y.$$

Es decir, $sen(\alpha) = y$, donde (x, y) es el punto determinado por el ángulo α en la circunferencia unitaria. El dominio de la función seno es el conjunto de los valore que puede tomar α, es decir $\mathbb{R}$. En esta circunferencia también se evidencia que el rango es el intervalo $[-1, 1]$.

3.5.2. Función coseno

El coseno es la razón entre el cateto adyacente (x) al ángulo α y la hipotenusa 1, entonces,

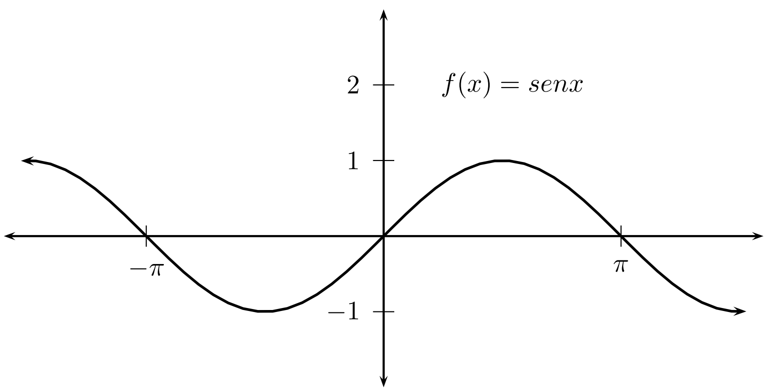
$$cos\alpha = x.$$

Es decir, $cos(\alpha) = x$, donde (x, y) es el punto determinado por el ángulo α en la circunferencia unitaria. En este caso el dominio de la función coseno también es $\mathbb{R}$ y el rango es el intervalo $[-1, 1]$.

A partir de lo anterior podemos obtener los siguientes valores:

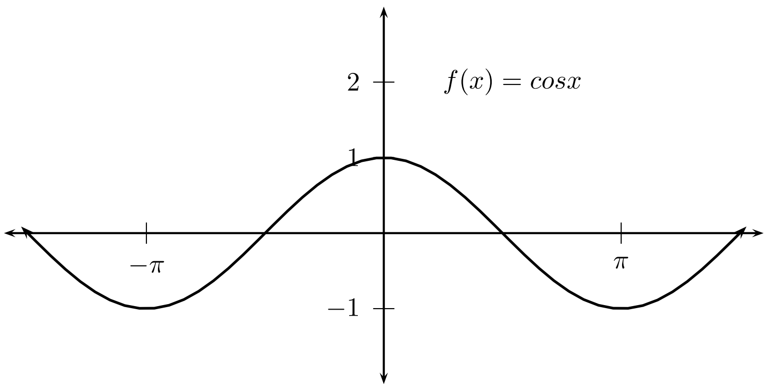
Ángulo	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Seno	0	1	0	-1	0
Coseno	1	0	1	0	-1

Con estos valores y ayuda de la calculadora, realizamos la gráfica de cada una de las funciones.



Observemos que esta función se repite cada 2π; es decir, los valores de la función en el intervalo del dominio $[0, 2\pi)$ son suficientes para conocer la función en cualquier punto. Se dice, en este caso, que la función es periódica, de período

2π, la función se anula en los valores de x iguales a $k\pi$, siendo k un número entero.



Obsevemos que la gráfica de la función coseno es similar a la de la función seno, sólo que está desfasada (corrida) en relación al eje y.

La función se anula en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, siendo k cualquier número entero.

3.5.3. Función tangente

La tangente es la razón entre el cateto opuesto y el adyacente, luego,

$$tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}.$$

Debemos tener en cuenta que al establecer $tan\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$ tenemos que evitar que el denominador sea 0. En la gráfica de $cosx$ se evidencia que corta al eje x en $\frac{-\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; en general, en todos los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$; por esta razón se exluyen del dominio de la función $tanx$ estos valores.

El dominio de esta función es:

$$\mathbb{R} - \left\{ \dots \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \right\}$$

y el rango es $\mathbb{R}$. La gráfica de esta función se presentará en el capitulo 4.

3.6. Análisis de situaciones

Usualmente se utiliza una función lineal para modelar situaciones que indican depreciación, ingresos, costos totales y utilidades pero todas cuentan con la característica de tener forma lineal. Veamos.

Situación 1:
Al finalizar la construcción de un edificio en 2005, éste tenía un valor de \$10 200 000. Si se deprecia linealmente durante 50 años, ¿cuál será el valor contable del edificio en 2008 y 2010? (Suponga que el valor de desecho es \$0.)

Para resolver el ejercicio vamos a establecer inicialmente la variable dependiente e independiente:

Debemos tener en cuenta que precio del edificio depende de la "edad "del mismo, es decir, de los años que lleva de estar construido. Por ende, la variable dependiente son los años y la independiente es el precio. Entonces, nuestra función es $p(x)$, donde p es precio y x son los años.

Como los datos dados son los siguientes:

Precio	Año
\$10 000 000	0
\$0	51

Nótese que se indicó que el año 2005 es el año 0, lo que nos indica esta asignación es que en 2005 "nació "el edificio y desde este año 50 años más tarde han transcurrido 51 años.

Con lo anterior observamos que se tienen dos parejas de puntos (0, \$10 200 000) y (51, \$0). Debe aclararse que como se indica que el precio se deprecia **linealmente,** entonces, los puntos son justamente aquellos por donde pasa la función lineal, que al tener las mismas características de una ecuación lineal debe representarse gráficamente como una línea recta, y como consecuencia para determinarla, necesitamos la pendiente y la constante b.

Es necesario enfatizar y aclarar que las parejas ordenadas deben ordenarse en la forma presentada en el párrafo anterior debido a que en el eje X del plano cartesiano siempre se ubican los valores de la variable independiente y en el eje Y los valores de la variable dependiente.

Efectuemos entonces los pasos para determinar la pendiente y la constante b:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{\$0 - \$10\ 200\ 000}{51 - 0}$$

$$m = \frac{-\$10\ 200\ 000}{51}$$

$m = -\$200\ 000$
Luego, el valor de b usando el punto $(0,\ \$10\ 200\ 000)$ es:

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x) = mx + b$$

$$f(x) = -200\ 000x + b$$

$$10\ 200\ 000 = -200\ 000(0) + b$$

$$10\ 200\ 000 = b$$

Con lo cual se obtiene que la función es $f(x) = -200\ 000x + 10\ 200\ 000$.

Ahora determinemos el dominio de la función p. Como habíamos mencionado el dominio corresponde a los valores que toma la variable independiente, en nuestro caso, los años cuyos valores corresponden al conjunto de los números naturales[1].

Establezcamos entonces el rango de la función p. Puesto que al operar cada valor de x, según se indica en la función, éstos son la resta de los múltiplos de 200 000 con 10 200 000, entonces:

Rango de $p := \{10\,200\,000,\ 10\,000\,000,\ 9\,800\,000,\ 9\,600\,000,\ \ldots,\ 10\,000\,000, 0\}$

Así, hemos presentado algunos de los aspectos más importantes de una función correspondiente a la depreciación lineal de un edificio. Con ella determinamos el valor del edificio en cualquier año y si conocemos el precio, pero no el año, es posible determinarlo con la función de precio.

Determinemos entonces el precio del edificio en 2008 y en 2010. El año correspondiente al 2008 es 3 y al 2010 es 5:

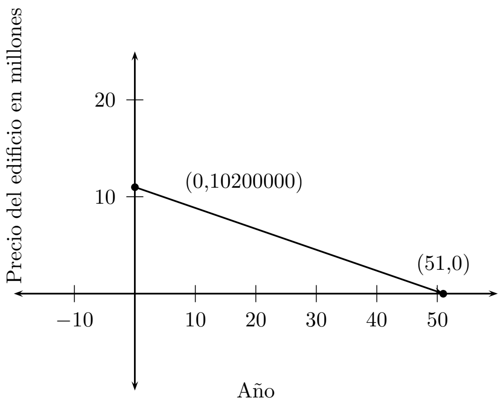
$$f(3) = -200\ 000(3) + 10\ 200\ 000 = 9\ 600\ 000$$

$$f(5) = -200\ 000(5) + 10\ 200\ 000 = 9\ 200\ 000$$

[1] Recordemos que los naturales son: $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$

Concluimos así que el precio del edificio en 2008 (tres años después) y en 2010 (cinco años después) es 9 600 000 y 9 200 000, respectivamente.

Podemos, adicionalmente realizar la gráfica que representa el comportamiento del precio, veamos.



Observemos que en la gráfica se distingue claramente el dominio y el rango de la función de precio, así como los puntos de corte que indican cúanto valía el edificio, en el año inicial e igualmente el año y precio de desecho del mismo.

En general los computadores, los automóviles y las máquinas son los que más tienden a un comportamiento de depreciación, aunque no siempre es lineal, puesto que éste depende de las características del artículo en el mercado.

Situación 2:

En los costos de producción de cualquier bien, intervienen dos tipos de costos, fijos y variables.

Los costos fijos son aquellos, que bajo condiciones normarles no dependen del nivel de producción, es decir, que hay que pagarlos sin importar la cantidad de artículos producidos, y los costos variables son aquellos que dependen del nivel de producción, es decir, los que están relacionados en forma directa con la cantidad de artículos producidos.

Luego, podemos decir que:

$$Costo\ total = costos\ variables + costo\ fijo \tag{3.3}$$

Notemos con la letra C el costo total, c_v como costos variables y c_f como costo fijo, entonces podemos escribir la expresión (3.3) como

$$C = c_v + c_f \tag{3.4}$$

Observemos que c_v depende del número de artículos producidos, luego es igual al número artículos producidos multiplicado por el costo variable por unidad c_f es constante (un valor numérico fijo).

Ahora, si x representa el número de artículos producidos y m el costo variable por unidad, entonces podemos definir la función: $C(x) = mx + c_f$.

Por ejemplo, supongamos que el costo total de producción en una fábrica de sillas tiene un comportamiento lineal y que producir una silla de madera cuesta \$80 000, también, que los costos fijos mensuales ascienden a \$2 000 000.

Entonces, si x representa el número de sillas producidas el costo variable mensual depende del número de sillas producidas y está dado por 80 000x. Luego una función que representa la situación anterior es:

$$C(x) = 80\ 000x + 2000000$$

Usando la función anterior, ¿Qué costo tiene para la empresa producir 100 sillas al mes?

Para solucionar este interrogante, debemos evaluar la función costo en $x = 100$, es decir, debemos calcular $C(100)$

$$C(100) = 80\ 000(100) + 2000000 = 10\ 000\ 000 \tag{3.5}$$

Lo que significa que producir 100 sillas en el mes cuesta \$ 10 000 000.

Es importante tener en cuenta que en la función $C(x) = 80\ 000x + 2000000$, el valor de 80 000 significa que por cada silla adicional que se produzca, el costo total aumenta en 80 000. Por otro lado, el valor de 2000000, como se dijo anteriormente, representa el costo fijo o también el costo de producción que debe cubrirse aunque no se fabrique ninguna silla.

Supongamos ahora que la empresa sufrió un cambio en su estructura productiva por lo que su función de costo total se vio afectada, de tal manera que si se producen 50 sillas en un mes, el costo es de \$ 8 000 000 y si se producen 70 sillas, el costo es de \$10 500 000. Teniendo en cuenta que el costo es lineal, determinemos la función de costo total C de producir x sillas al mes.

Primero, recordemos que para establecer una función lineal cualquiera sólo necesitamos conocer dos pares ordenados que pertenezcan a la función. En este caso particular, la primera componente representa la cantidad de sillas producidos por mes y la segunda componente representa el costo total mensual.

Lo primero que necesitamos es determinar el valor numérico de m para esto basta tomar los puntos (x_1, C_1) y (x_2, C_2) que en este caso son: $(50, 8\ 000\ 000)$ y $(70, 10\ 500\ 000)$, y aplicar la siguiente fórmula.

$$m = \frac{C_2 - C_1}{x_2 - x_1}$$

Reemplazando tenemos:

$$m = \frac{10\ 500\ 000 - 8\ 000\ 000}{70 - 50}$$

$$m = \frac{2\ 500\ 000}{20}$$

$$m = 125\ 000$$

Ahora tomemos cualquier punto, por ejemplo $(50, 8\ 000\ 000)$ (también podríamos tomar $(70, 10\ 500\ 000)$) para hallar el valor de b:

$$C(x) = mx + b$$

$$C(x) = 125\ 000x + b$$

$$8\ 000\ 000 = 125\ 000(50) + b$$

$$8\ 000\ 000 = 6\ 250\ 000 + b$$

Despejando b tenemos:

$$b = 8\ 000\ 000 - 6\ 250\ 000 = 1\ 750\ 000$$

Con lo cual obtenemos que la función de costo es $C(x) = 125\ 000x + 1\ 750\ 000$.

Situación 3:

Si las ecuaciones de la demanda y de la oferta de un determinado bien son, respectivamente: $q = 390 - 2p$ y $s = 150 + p$. Encontremos el punto de equilibrio.

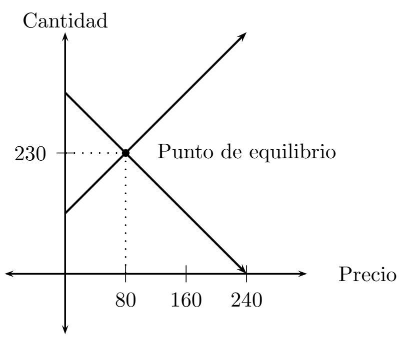
Las coordenadas del punto de equilibrio se obtienen hallando el punto de intersección de las curvas de demanda y de oferta del bien considerado. Es decir, hallando el punto para el cual la demanda q se iguala a la oferta s; en otras palabras, cuando se satisface la igualdad;

$$q = s$$

que en este caso está dada por:

$$\begin{aligned} 390 - 2p &= 150 + p & \\ 390 - 150 &= 2p + p & \text{despejando } p \\ 240 &= 3p & \text{adicionando términos semejantes} \\ \frac{240}{3} &= \frac{3p}{3} & \text{dividiendo a ambos lados en 3} \\ 80 &= p & \end{aligned}$$

Lo anterior significa que para un precio de \$80, la cantidad demanda es igual a la cantidad ofrecida; la cantidad demandada se encuentra reemplazando $p = 80$ en $q = 390 - 2p$, luego $q = 390 - 2(80) = 230$, lo cual significa que el punto de equilibrio es $(80, 230)$. Veamos esto gráficamente.



Situación 4:

La función de interés simple está dada por $I = crt$ donde c es el capital (dado en pesos), r la tasa de interés y t el tiempo (en años).

Supongamos, por ejemplo, que \$ 200 000 ganan un interés simple a una tasa anual de 2,6 %, en este caso:

$$I = 200\ 000(0,026)t$$

En este caso el tiempo t es la variable independiente y el interés I es la variable dependiente.

Si queremos calcular el interés en seis meses $t = \frac{1}{2}$ de año, entonces:

$$I = 200\ 000(0,026)\left(\frac{1}{2}\right) = 26\ 000$$

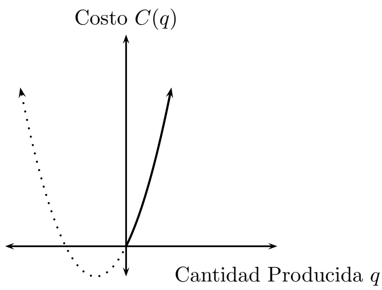
Esto significa que en seis meses un capital de \$200 000 generará \$ 26 000 de interés.

Situación 5:

Analicemos el caso de un monopolio, es decir de una empresa que es la única que vende cierto bien. Supongamos que los costos totales de este monopolista están dados por una función cuadrática de la forma: $C(q) = 80q + 3q^2$, donde $q \geq 0$ representa el nivel de producción. Si para cada q el precio p al que se puede vender la producción es: $p(q) = 1200 - 3q$. La función de ingreso para un monopolista es $I = p.q$ que en este caso es $I(q) = (1\ 200 - 3q)q$, entonces:

$$I(q) = 1\ 200q - 3q^2.$$

Observemos el comportamiento de los costos de esta empresa:



Note que la función costo está bien definida para valores positivos de q ($q \geq 0$) dado que q representa la cantidad producida; por esta razón, aunque la gráfica de la función costo es una parábola que abre hacia arriba, en este caso sólo nos centramos en la región en la cual $q \geq 0$ (la línea gruesa), la parte punteada de la gráfica corresponde a los valores negativos de q.

Por otra parte, el beneficio π dado por la venta de q unidades de un bien es:

$$\pi(q) = (I - C).$$

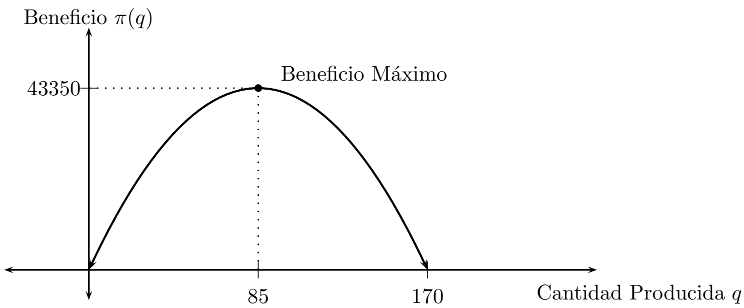
Siendo I el ingreso obtenido y C el costo ocasionado por la venta y producción, respectivamente de q unidades de dicho bien.

Tanto I como C son funciones de q, en consecuencia π también lo es.

La función de benecios ($\pi(q)$ de esta empresa en este caso es:

$$\pi(q) = 1\ 200q - 3q^2 - (80q + 3q^2) = 1\ 200q - 3q^2 - 80q - 3q^2 = 1\ 020q - 6q^2$$

Con esto tenemos que la función de beneficios es la función cuadrática $\pi(q) = 1\ 020q - 6q^2$ que está reprentada por una parábola que abre hacia abajo. Veamos a continuación la gráfica de esta función.



Observemos que en la función $\pi(q) = 1\ 020q - 6q^2$ $a = -6$, $b = 1\ 020$ y $c = 0$, por lo tanto, el vértice está dado por:

$$\left(-\frac{1\ 020}{2(-6)}, \pi\left(-\frac{1\ 020}{2(-6)}\right)\right) = (85, \pi(85)) = (85, 43\ 350)$$

Donde $\pi(85) = 1020(85) - 6(85^2) = 86\ 700 - 43\ 350 = 43\ 350$.

También podemos observar en la gráfica que hay dos valores de q para los cuales el beneficio es cero; 0 y 170 que resultan de resolver la ecuación $pi(q) = 0$, esto es:

$$\begin{aligned} 1\ 020q - 6q^2 &= 0 \\ 6q(170 - q) &= 0 \quad \text{Factorizamos } 6q. \\ q(170 - q) &= 0 \quad \text{Dividimos a ambos lados de la ecuación por 6.} \end{aligned}$$

Esto último se cumple cuando $q = 0$ y $q = 170$.

De lo anterior podemos concluir que si este monopolista no produce o produce 170 unidades su beneficio es cero, el beneficio es máximo si produce 85 unidades. Para un nivel de producción menor que 85 el beneficio es creciente y para una producción mayor que 85 el beneficio es decreciente.

Situación 6:

Una empresa puede vender un determinado artículo a un precio unitario de $p = 500 - q$ donde q, representa el número de unidades.

El costo fijo de producción es de \$ 20 000, mientras que el costo por unidad se estima en \$ 200.

1. Plantee las funciones de costo e ingreso.
2. Obtenga la función de beneficio

Solución:

Sabemos que el costo total se halla adicionando el costo fijo, que en este caso es de \$ 20 000, y el costo variable que depende del número de unidades producidas, es decir, \$ 200q; luego la función de costo está dada por:

$$C_T(q) = 20\ 000 + 200q \tag{3.6}$$

Para plantear la función de ingreso, recordemos que éste es el producto del precio unitario ($p = 500 - q$) por la candidad vendida (q);

$$I(q) = (500 - q)q \tag{3.7}$$

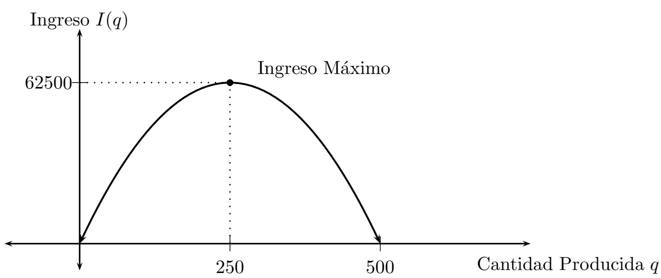
Por lo cual tenemos que el ingreso total de producir q unidades es:

$$I(q) = 500q - q^2 \tag{3.8}$$

Este ingreso está representado por una función cuadrática. La gráfica de la expresión (3.7) es una parábola que abre hacia abajo, usando la expresión (3.2) su vértice es el punto $(250, I(250))$, es decir $(250, 62\ 500)$.

En la expresión (3.7) se observa que esta gráfica corta al eje x (en este caso representa el número de unidades producidas y vendidas) en los puntos $q = 0$ y $q = 500$.

Observemos la gráfica:



Note que la producción genera un ingreso creciente hasta 250 unidades, a partir de esa cantidad el ingreso es decreciente; veamos ahora que sucede con el beneficio.

El beneficio $\pi(q)$ se obtiene restando ingreso menos costo, de las ecuaciones (3.8) y (3.6). Tenemos:

$$\begin{aligned}
\pi(q) &= 500q - q^2 - (20\ 000 + 200q)\\
\pi(q) &= 500q - q^2 - 20\ 000 - 200q\\
\pi(q) &= 300q - q^2 - 20\ 000\\
\pi(q) &= -q^2 + 300q - 20\ 000 \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

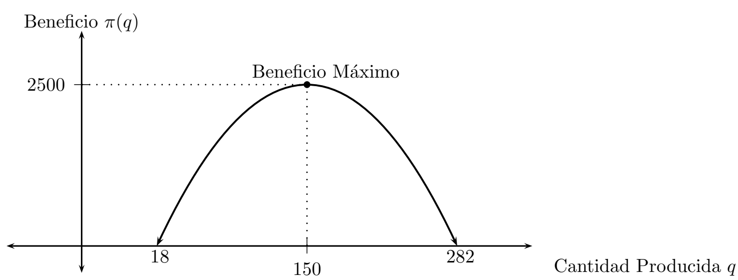
La ecuación 3.9 representa una parábola que abre hacia abajo, usando la expresión (3.2) con $a = -1$, $b = 300$ y $c = -20\ 000$. Tenemos que su vértice es el punto $(150, \pi(150))$, es decir $(150, 2\ 500)$.

En este caso la expresión 3.9 no se puede factorizar, entonces usamos la fórmula de la ecuación cuadrática $\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ para determinar los puntos de corte de la parábola con el eje x.

Luego, se tiene que:

$$q_1 = \frac{-300+\sqrt{300^2-4(-1)(-20\ 000)}}{2(-1)} \approx 18 \quad \text{y} \qquad q_2 = \frac{-300-\sqrt{300^2-4(-1)(-20\ 000)}}{2(-1)} \approx 282$$

A continuación representamos gráficamente la función de beneficio.



Producir entre 18 y 150 unidades tiene un beneficio creciente, entre 150 y 282 un beneficio decreciente, producir una cantidad superior a 282 unidades genera un beneficio negativo o pérdidas.

La función exponencial es una de las más usadas en economía; aparece en muchos modelos económicos importantes, fenómenos como el crecimiento económico, crecimiento demográfico, interés compuesto continuamente; entre otros se pueden describir usando funciones exponenciales. A continuación se analizarán algunas situaciones.

Situación 7:

Interés Compuesto:

Se dice que un capital genera un interés compuesto, cuando se establece que el interés simple producido por éste y al final de cada intervalo de tiempo previamente determinado, llamado período de capitalización, se suma a dicho capital para producir nuevos intereses.

Partamos de un capital inicial de (P_0), un interés compuesto a la tasa periódica i, durante n períodos; hallemos el monto final:

Período	**Capital inicial**	**Interés del período**	**Monto al final del período**
1	P_0	$P_0 i$	$P_0 + P_0 i = P_0(1+i)$
2	$P_0(1+i)$	$(P_0(1+i))i$	$P_0(1+i) + (P_0(1+i))i=$ $P_0(1+i+i+i^2)=$ $P_0(1+2i+i^2)=P_0(1+i)^2$
3	$P_0(1+i)^2$	$(P_0(1+i)^2)i$	$P_0(1+i)^2 + (P_0(1+i)^2)i=$ $P_0(1+i)^2(1+i)= P_0(1+i)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$P_0(1+i)^{n-1}$	$(P_0(1+i)^{n-1})i$	$P_0(1+i)^{n-1} + (P_0(1+i)^{n-1})i=$ $P_0(1+i)^n$

De este modo, el monto final (F) de un capital inicial (P_0), a un interés compuesto durante n períodos a una tasa i está dado por:

$$F = P_0(1+i)^n$$

Calculemos por ejemplo, el monto que se obtendrá depositando \$7 000 000 durante un año al 1,5 % de interés, con capitalización cada trimestre.

En este caso $i = 0{,}015$, $P_0 = 7000000$, $n = 4$ (dado que un año tiene cuatro trimestres), entonces, al cabo de un año el monto final es:

$$F = 7000000(1+0{,}015)^4 = 7429544.$$

Situación 8:

El precio unitario de fabricar muñecos en una empresa se describe mediante la siguiente función:

$$C(n) = 15300e^{-0{,}015n} + 870$$

donde,

n : representa el número de muñecos fabricados anualmente. Este número no puede ser inferior a 50.

$C(n)$: costo unitario de fabricar un muñeco cuando se fabrican n muñecos. Para manejar valores pequeños, supongamos que este costo está dado en dólares.

El precio unitario de venta de los muñecos depende del número de unidades que se ponen en el mercado cada año y responde a la siguiente función:

$$P = 4100e^{-0{,}004n} + 420$$

que representa el precio unitario de venta de cada muñeco.

1. Represente gráficamente estas dos funciones.
2. Defina los rangos de producción que generan ganancia y los que generan pérdida.
3. Encuentre la función de ganancia de la empresa.

Solución:

Con la ayuda del programa de datos excel elaboramos una tabla con diferentes valores (reales) para el número de muñecos producidos y su respectivo valor al evaluar las dos funciones (el estudiante puede verificar estos datos usando la calculadora).

Número de muñecos	**Costo de producción**	**Precio de venta**
50	8097,37	3776,82
100	4284,05	3168,35
140	2743,70	2762,00
200	1631,81	2262,29
300	1039,99	1654,94
400	907,93	1247,82
500	878,46	974,91

Ahora representemos estos valores en el plano cartesiano; en este caso el eje x representa el número de muñecos fabricados y comercializados, y el eje y el costo de producción y el precio de venta de cada nivel de produción.

Observando la gráfica 3.1 podemos afirmar que:

- Se evidencian dos puntos de corte de estas dos funciones, estos valores son aproximadamente 140 y 600. De lo cual se puede deducir que para una producción inferior a aproximadamente 140 muñecos, los costos de producción son altos comparados con el precio de venta, puede decirse entonces que la eficiencia de producción es muy baja y por lo tanto se tienen pérdidas en el negocio.

- Para una producción comprendida entre 140 y 600 muñecos anuales, los costos de producción son inferiores a los precios de venta correspondientes, esto puede interpretarse como que ha mejorado la productividad, se ha aumentado la oferta y el precio de venta no ha disminuido demasiado a causa de esa mayor oferta, por lo cual se producen ganancias.

- Por último, para una producción superior a 600 muñecos anuales, puede decirse que hay demasiados muñecos en el mercado y la mejora que se obtiene en la productividad no compensa la disminución de costo provocada por una sobreoferta de muñecos, en este caso, nuevamente los costos de producción son superiores a los precios de venta y el negocio genera pérdida.

Por otra parte, nos falta encontrar la función de ganancia de la empresa, para esto hallamos la ganancia por cada muñeco es decir precio de venta menos costo de producción:

$$GU : \text{ganancia por cada muñeco} = 4100e^{-0{,}004n} + 420 - (15300e^{-0{,}015n} + 870)$$

$$GU = 4100e^{-0{,}004n} + 420 - 15300e^{-0{,}015n} - 870$$

$$GU = 4100e^{-0{,}004n} - 15300e^{-0{,}015n} - 450$$

La ganancia total (GT) la obtenemos multiplicando la ganania unitaria por el total de muñecos fabricados (n), tenemos entonces:

$$GT = (4100e^{-0{,}004n} - 15300e^{-0{,}015n} - 450)n$$

De nuevo usamos excel para calcular algunos valores de esta función:

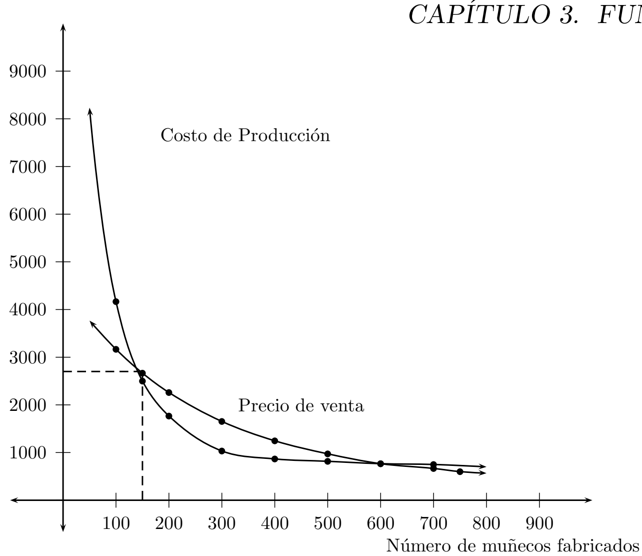


Figura 3.1: costos de producción y precio de venta

Número de muñecos	Ganancia unitaria	Ganancia total
50	-4320	-216021
100	-1116	-111558
139	-1	-77
140	18	2572
150	188	28128
200	631	126101
400	340	135940
500	96	48206
550	0	163
552	-3	-1770
600	-80	-47967
700	-201	-140770

Si analizamos cuidadosamante estos valores, nos encontramos con resultados muy similares a los que se observan en la figura 3.1.

3.7. Actividades de práctica

1. Determine si la ecuación define a y como función de x. En tal caso, escríbala en la forma $y = mx + b$.

a) $2x + 3y = 6$
b) $3\sqrt{x} + 4y = 0$
c) $3x - 6y + 7 = 0$
d) $2x^2 - 8y + 4 = 0$
e) $-2x + 4y = 7$
f) $2x - 3y^2 + 8 = 0$

2. Un fabricante tiene gastos fijos mensuales de \$40000 y un costo unitario de producción de \$8. El producto se vende a \$12 la unidad.

   a) ¿Cuál es la función de costos? ________________________________
   ____

   b) ¿Cuál es la función de ingresos? ______________________________
   ____

   c) ¿Cuál es la función de ganancia? ______________________________
   ____

   d) Calcule la ganancia (o pérdida) correspondiente a niveles de producción de 8000 y 12000 unidades.

3. Un fabricante tiene gastos fijos mensuales de \$100 000 y un costo unitario de producción de \$14. El producto se vende a \$20 la unidad.

   a) ¿Cuál es la función de costos? ________________________________
   ____

   b) ¿Cuál es la función de ingresos? ______________________________
   ____

   c) ¿Cuál es la función de ganancia? ______________________________
   ____

   d) Calcule la ganancia (o pérdida) correspondiente a niveles de producción de 12000 y 20000 unidades.

4. Determine el punto de intersección de cada par de líneas rectas.

   a) $y = 3x + 4 \quad y = -2x + 14$
   b) $2x + 4y = 11 \quad -5x + 3y = 5$
   c) $2x - 3y = 64 \quad 3x + 6y = 16$
   d) $y = \frac{2}{3}x - 4 \quad x + 3y + 3 = 0$

5. Determine gráfica y algebraicamente el punto de equilibrio para los ejercicios 2 y 3.

6. Una microcomputadora adquirida a un costo de \$60000 en el año 2000 tiene un valor de desecho de 12000 al final de cuatro años. Suponga que utiliza el método de depreciación lineal.

   a) Determine la tasa de depreciación.

b) Encuentre la ecuación lineal que expresa el valor contable de la microcomputadora al final del año t.

c) Trace la gráfica de la función obtenida en b.

d) Indique el valor contable de la microcomputadora al final del tercer año.

7. Un producto puede fabricarse con la máquina I o la máquina II. El fabricante estima que los costos fijos mensuales por el uso de la máquina I son de \$18000 y de \$15000 con la máquina II. Los costos variables de fabricación de una unidad del producto utilizando la máquina I y la máquina II son de \$15 y \$20, respectivamente. El producto se vende a \$50 la unidad.

   a) Halle las funciones de costos asociadas con el uso de cada máquina.

   b) Grafique las funciones de costos y las funciones de ingresos en el mismo conjunto de ejes.

   c) ¿Qué máquina debe elegir la gerencia para maximizar su ganancia, si las ventas proyectadas son de 450 unidades, 550 unidades y 650 unidades? ______________________________

   ____

   d) ¿Cuál es la ganancia para cada uno de los casos del item anterior? _

   ____

8. Ecuación de demanda:

   Describa la relación entre el precio por unidad p de cierto producto y el número de unidades q del producto que los consumidores comprarán. Si q es un número de entrada, entonces para cada valor de q se asigna exactamente un número de salida p.

   La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad demandada y el precio para cierto producto:

CANTIDAD q	PRECIO p
15	700
20	900

   a) Determine la ecuación de demanda para este producto asumiendo que tiene comportamiento lineal.

   b) ¿Cuál es el precio de 100 unidades? ______________________________

   ____

9. Una fábrica de muebles, realiza gabinetes de cocina y los vende a \$250 000 cada uno. En la fabricación, los costos fijos son \$1 300 000 y el costo de producción de cada gabinete es \$110 000.

    a) Exprese las funciones de ingreso y costo en función del número de gabinetes que vende.

    b) ¿Cuántos gabinetes debe vender la fábrica para obtener una ganancia de \$3 000 000 ? ____

    ____

10. Un fabricante de empastes rústicos para libros tiene gastos fijos anuales de \$1200000 y un costo unitario de producción de \$5000. Si el valor de cada empaste es de \$10 000 para el público, determine:

    a) La función de costo mensual.

    b) La función de ingresos mensual.

    c) La función de ganancia mensual.

    d) Calcule la ganancia o pérdida de elaborar 4, 20, 100 y 2000 empastes mensuales.

    e) ¿Con qué nivel de producción el fabricante obtiene pérdidas? ______

    ____

    f) Trace la gráfica de la función de costos e ingresos. Para esto considere la función de costos con signo negativo, es decir considere -C.

    g) Halle el punto de equilibrio entre los ingresos y los costos.

    h) Trace la función de ganancia.

11. El costo fijo asociado al proceso de producción de un determinado bien es de \$1 800 000; por cada 10 unidades adicionales del bien producido, el costo se incrementa en \$400 000. El precio en el mercado es tal que por cada unidad adicional vendida, se genera un incremento en el beneficio de \$30 000. Obtenga las funciones de costo, ingreso y beneficio.

12. Halle el vértice, las intersecciones con el eje x (si estas existen) y grafique la parábola.

    a) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

    b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

    c) $f(x) = 1{,}2x^2 + 3{,}2x + 1{,}2$

    d) $f(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2x + 2$

    e) $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$

13. Determine los puntos de intersección de las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -x^2 + 4$; $g(x) = x + 2$

b) $f(x) = -x^2 + 2x$; $g(x) = x^2 - 6$

c) $f(x) = 2x^2 - 5x - 8$; $g(x) = -3x^2 + x + 5$

d) $f(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}2x - 4$; $g(x) = -0{,}3x^2 + 0{,}7x + 8{,}2$

14. La ganancia mensual estimada obtenida por una empresa al producir y vender x unidades de cámaras modelo *M1* es: $P(x) = -0{,}04x^2 + 240x - 10000$ dólares. Encuentre cuántas cámaras debe producir cada mes para maximizar sus ganancias.

15. La relación entre las ganancias trimestrales de cierta empresa, $P(x)$, y la cantidad de dinero x invertido en publicidad por trimestre queda descrita mediante la función:

$$P(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 7x + 30 \qquad (0 \leq x \leq 50)$$

donde $P(x)$ x se miden en miles de dólares.

a) Trace la gráfica de P.

b) Determine la cantidad de dinero que debe invertir la compañía en publicidad por trimestre para maximizar sus ganancias en este período.

16. La funciones de oferta y demanda semanales de las tiendas de campaña Sportsman están dadas por:

$$p = -0{,}1x^2 - x + 40$$
$$p = 0{,}1x^2 + 2x + 20$$

respectivamente, donde p se mide en dólares y x en unidades de centena.

a) ¿Cuál precio límite? es decir, ¿cuál es el precio sobre el cual ya no habrá demanda? ______________________________

____

b) ¿Cuál es la cantidad máxima demandada por semana? __________

____

c) ¿Cuál es el precio mínimo para el cual la tienda colocará los productos en el mercado? ______________________________

____

d) Determine la cantidad y el precio de equilibrio.

17. Si el ingreso mensual de la venta de cierto producto en una empresa está dado por la siguiente ecuación: $I(p) = \frac{-p^2}{2} + 30p$ donde p representa el precio unitario.

a) Trace la gráfica de I.

b) Determine el precio unitario que maximiza el ingreso mensual de la empresa.

c) ¿Cuál es este ingreso? ______________________________

____

18. Trace las gráficas de $y = 3^x$, y $y = \log_3 x$ en el mismo plano cartesiano.

19. Resuelva la ecuación $3e^{x+1} - 2 = 4$

20. Use las propiedades de la función logarítmica para resolver la ecuación

    a) $\log_3 x = 2$

    b) $\log_x \frac{1}{16} = -2$

    c) $\log_2 x - \log_2(x-2) = 3$

    d) $\log_4(5x - 4) = 2$

21. Utilice los logaritmos para despejar t en las ecuaciones

    a) $5e^{-2t} = 6$

    b) $\frac{50}{1+4e^{0,2t}} = 20$

22. Resuelva las ecuaciones:

    a) $2^{2x+1} \cdot 2^{-3} = 2x - 1$

    b) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

    c) $8^x = \left(\frac{1}{32}\right)^{x-2}$

    d) $2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$

23. Trace la gráfica de $y = e^{0,4x}$

24. Si se invierte una cantidad inicial P, a una tasa de interés r, durante un período de t años, si el interés se compone n veces al año; entonces, la cantidad F que recibimos está dada por:

$$F = P(1 + \frac{r}{n})^n$$

    Si se invierten 500 dólares a una tasa de interés del 5 % por año. Calcule el tiempo requerido para que se duplique el dinero si el interés se compone

    a) Semestralmente

    b) Trimestralmente

25. Con las mismas variables que en el ejercicio anterior, si el interés se compone de manera continua, al cabo de t años se recibe una cantidad dada por:

$$F = Pe^{rt}.$$

Encuentre el rendimiento porcentual anual si se invierten 6500 dólares, si el interés es compuesto de manera continua y recibe \$7782000 al cabo de 3 años.

26. Encuentre el monto compuesto y el interés compuesto para una inversión de \$3000000 durante $2\frac{1}{2}$ años al 9 % anual, compuesto mensualmente.

27. Debido a una campaña de publicidad ineficaz, una compañía encuentra que sus ingresos anuales han sufrido una blackucción drástica. Por otra parte, el ingreso anual I al final de los t años de negocios satisface la ecuación
$$I(t) = 200000e^{(-0,2t)}.$$
   a) ¿En cuánto tiempo se obtienen ingresos de 2 000 000.
   b) Escriba tres características de esta función de ingresos.

28. Determine el tiempo necesario para que una inversión de \$500 000 crezca a \$800 000 a una tasa de interés del 9.5 % anual compuesta trimestralmente.

Capítulo 4

Límites y continuidad

En el capítulo tres, estudiamos algunas funciones y sus pricipales características, tales como dominio, y gráfica. A partir de este capítulo 6 el comportamiento de una función basándonos en algunos conceptos fundamentales del cálculo.

En esta parte analizaremos el concepto de límite y continuidad.

4.1. Límites

En principio haremos que una variable "se aproxime" a un valor particular y examinaremos el efecto que tiene sobre los valores de la función.

Consideremos por ejemplo la expresión $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ observemos que, si $x = 2$, la fracción se convierte en una expresión sin sentido, dado que el denominador es cero. Luego la función $f(x)$ no está definida para $x = 2$, es decir, 2 no pertenece al dominio de la función. Sin embargo, nos podemos preguntar ¿qué pasa con la función cuando x toma valores muy cercanos a 2?

Para resolver este interrogante, tomamos valores de x muy cercanos a 2 (sin incluir $x = 2$), con ayuda de la calculadora los evaluamos en la función y obtenemos los siguientes valores:

x	$\frac{x^2-4}{x-2}$
1.9	3.9
1.99	3.99
1.999	3.999

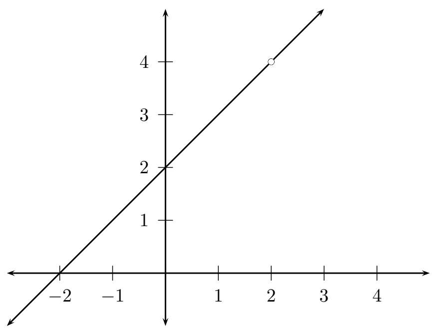
x	$\frac{x^2-4}{x-2}$
2.01	4.01
2.001	4.001
2.0001	4.0001

Podríamos decir, a partir de la tabla que, cuando x se aproxima a 2, $f(x)$ se aproxima a 4. Luego es apropiado decir que $f(x)$ tiende o se acerca a 4 cuando x toma valores muy cercanos a 2, esto lo podemos escribir como:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

que se lee *el límite cuando x tiende a* 2 *de* $\frac{x^2-4}{x-2}$ es 4.

A continuación presentamos una parte de la gráfica de $f(x)$, esta función está definida para todo x en los reales, excepto para $x = 2$. Notemos, que se usa un círculo pequeño para indicar que ese punto no pertenece a la gráfica de la función.



Podemos hacer que $f(x)$ esté tan cercana a 4 como queramos. El límite existe en 2 aunque 2 no esté en el dominio de f.

Ejemplo

Veamos el comportamiento de la función $f(x) = x^2$ cuando la variable toma valores muy cercanos a 1, tanto por derecha como por izquierda, sin que el valor de la variable sea 1.

x	x^2
1.5	2.25
1.3	1.69
1.1	1.21
1.01	1.02
1.001	1.002

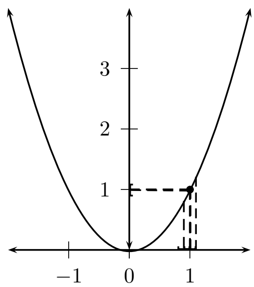
Tomando valores de x muy cercanos a 1 por la derecha.

x	x^2
0.8	0.64
0.9	0.81
0.99	0.98
0.999	0.99
0.9999	0.999

Tomando valores de x muy cercanos a 1 por la izquierda.

Observemos que cuando la variable x toma valores muy cercanos a 1 por la derecha, la función se aproxima a 1, lo mismo sucede cuando la variable toma valores cercanos a 1 por la izquierda. Con esto podemos decir que la función tiende a 1 cuando la variable toma valores cercanos a 1.

Que se puede escribir como: $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$, Veamos la gráfica.



Observemos que a diferencia de la función del ejemplo anterior, en este caso 1 s pertenece al dominio de la función, es por esta razón que en la gráfica no se evidencia ninguna interrupción.

■

La función f tiende hacia el límite L cuando x tiende a a, si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de L haciendo que x esté suficientemente cerca de a, pero siendo distinto de a.

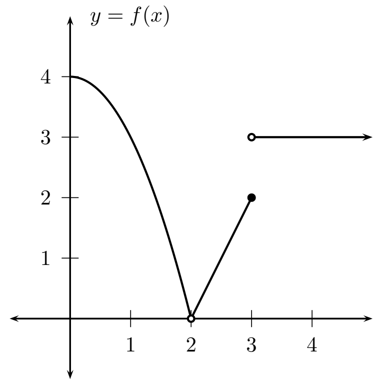
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

En otras palabras, es suficiente que $f(x)$ esté próximo a L cuando x está próximo a a pero es distinto de a, de hecho no nos interesa el valor de $f(a)$ ni siquiera la cuestión de si $f(a)$ está definido.

Recordemos, que cuando estamos buscando el límite cuando x tiende a a, no estamos interesados en lo que sucede con $f(x)$ cuando x es igual a a, sino sólo en el comportamiento de $f(x)$ cuando x está muy cerca a a.

Ejemplo

Observemos la gráfica de la siguiente función, cuando x toma valores muy cercanos a 2 tanto por derecha como por izquierda.



En la gráfica se evidencia que al tomar valores de x muy cercanos a 2 tanto por la derecha como por la izquierda, la función se aproxima a 0 es decir,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$$

donde $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ se lee: "límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 por la derecha". Y $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ se lee "límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 por la izquierda", que son llamados *límites laterales.*

Ahora, analicemos el comportamiento de la función al tomar valores de x muy cercanos a 3. Notemos que si nos acercamos a $x = 3$ por la derecha, los valores de la función se acercan a 3, que se escribe $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$; sin embargo, al acercarnos a $x = 3$ por la izquierda, los valores de la función se acercan a 2 o también $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$.

Luego,
$\lim_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim_{x\to 3^-} f(x)$ en el primer caso los límites laterales son iguales, por lo cual, podemos decir que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0.$$

Mientras que en el segundo caso, $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe, pues sus limites laterales existen, pero no son iguales.

■

Formalizando esto, tenemos:

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y solo sí $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$, lo que equivale a decir que el límite de una función existe si y solo sí, los límites laterales existen y son iguales.

4.2. Propiedades de los límites

Para determinar el límite de una función, no siempre tenemos que calcular los valores de la función o realizar la gráfica. De manera alternativa, hay varias propiedades de los límites que podemos emplear. Las siguientes son las que más utilizaremos.

1. Si $f(x) = c$ es una funcion constante, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

   Ejemplo

   Sea $f(x) = 5$, entonces:

   a) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 5 = 5$

   b) $\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7} 5 = 5$

   ■

2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ para cualquier entero positivo n.

   Ejemplo

   Sea $f(x) = x^3$, entonces:

   a) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^3 = 1^3 = 1$

   b) $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} x^3 = 4^3 = 64$

   ■

3. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen, entonces:

   a) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

   b) $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

   Esto es, el límite de una suma o diferencia, es la suma o diferencia de los límites respectivamente.

   Ejemplo

   a) Sea $f(x) = x^2$, y $g(x) = 3$, con $\lim_{x\to 6} f(x) = 6^2 = 36$ y $\lim_{x\to 6} g(x) = 3$, entonces:

      1) $\lim_{x\to 6}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 6}(x^2 + 3) = \lim_{x\to 6} x^2 + \lim_{x\to 6} 3 = 36 + 3 = 39$

2) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to 6}(x^2-3) = \lim_{x\to 6} x^2 - \lim_{x\to 6} 3 = 36-3 = 33$

b) $\lim_{x\to 2}[x^4+x] = \lim_{x\to 2} x^4 + \lim_{x\to 2} +x = 16+2 = 18$

■

4. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen, entonces:

   a) $\lim_{x\to a} [f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$.

   El límite de un producto es el producto de los límites.

   b) $\lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ siempre y cuando $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
   Significa que el límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el denominador no tenga un límite de 0.

   Ejemplo

   a) $\lim_{x\to 12}[x^2(x-2)] = \lim_{x\to 12} x^2.\lim_{x\to 12}(x-2) = 144 * 10 = 1\ 440$.

   b) $\lim_{x\to 2} \left[\frac{7+x^3}{x}\right] = \frac{\lim_{x\to 2}(7+x^3)}{\lim_{x\to 2}(x)} = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2}$.

   ■

5. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$, donde c es una constante. Esto significa que el límite de una constante por una función, es la constante por el límite de la función.

   Ejemplo

   a) $\lim_{x\to 4} 5x^3 = 5\lim_{x\to 4} x^3 = 5(4^3) = 5(64) = 320$.

   b) $\lim_{x\to -1} 13x^5 = 13\lim_{x\to -1} x^5 = 13(-1^5) = 13(-1) = -13$.

   ■

6. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, indica que el límite de la raíz n-ésima de una función, es la raíz n-ésima del límite de la función.

   Ejemplo

   a) $\lim_{x\to 0} \sqrt{2x+9} = \sqrt{\lim_{x\to 0} 2x+9} = \sqrt{9} = 3$

   b) $\lim_{x\to -3} \left(4x^2-20\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\lim_{x\to -3} \left(4x^2-20\right)^3} = \sqrt{\left(4(-3)^2-20\right)^3} = \sqrt{16^3} = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 64$.

   ■

4.2.1. Cálculo de algunos límites

En algunas ocasiones las propiedades enunciadas anteriormente para el cálculo de límites no son aplicables, ya que al evaluar directamente el límite se pueden presentar expresiones que matemáticamente son errores, por ejemplo, cuando el denominador se convierte en cero, estas expresiones reciben el nombre de *formas indeterminadas*.

Por ejemplo, retomando la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ analizada anteriormente, para la cual observamos el comportamiento alrededor de $x = 2$, basándonos en la tabla de valores, concluimos que $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Sin embargo, debemos notar que para calcular $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, no es posible usar la parte b) de la propiedad número 4, pues si bien es cierto que $\frac{x^2-4}{x-2}$ es un cociente, también tenemos que al evaluar el denominador en $x = 2$ se obtiene 0, que es la razón por la cual la propiedad no aplica.

En algunos casos, las formas indeterminadas señaladas anteriormente, se pueden desaparecer a través de algunas manipulaciones algebraicas de la función (factorizando, empleando conjugada, multiplicando y dividiendo por algún factor adecuado, entre otros).

En este caso particular, para calcular $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ efectuamos el siguiente procedimiento:

$\lim_{x\to 2} \left[\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right]$	Intentamos cancelar $(x-2)$ factorizando el numerador, como diferencia de cuadrados.
$= \lim_{x\to 2} \left[\frac{(x+2)}{1}\right]$	Cancelamos $x-2$ tanto del numerador como del denominador, $x-2 \neq 0$, dado que x tiende a 2 pero $x \neq 2$
$= 2+2 = 4$	Evaluamos la expresión que obtuvimos en $x = 2$.

Con esto, hemos probado analíticamente que $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Ejemplo

Calculemos los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to \frac{4}{3}} \frac{27x^3-64}{3x-4}$ 2. $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-x-15}{x^2-9}$ 3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$

Solución:

1). $\lim_{x\to\frac{4}{3}}\left[\frac{27x^3-64}{3x-4}\right]$	El denominador es cero, al evaluarlo en $x=\frac{4}{3}$
$=\lim_{x\to\frac{4}{3}}\left[\frac{(3x-4)(9x^2+12x+16)}{3x-4}\right]$	Factorizamos el numerador como una diferencia de cubos
$=\lim_{x\to\frac{4}{3}}\left[(9x^2+12x+16)\right]$	Cancelamos $3x-4$ tanto del numerador como del denominador
$=(9(\frac{4}{3})^2+12\frac{4}{3}+16)$	Evaluamos la expresión que obtuvimos en $\frac{4}{3}$.
$=\frac{144}{9}+\frac{48}{3}+16=\frac{432}{9}=48$ ■	

2). $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-x-15}{x^2-9}$	El denominador es cero, al evaluarlo en $x=3$
$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+5)}{(x-3)(x+3)}$	Factorizamos tanto el numerador como el denominador
$\lim_{x\to 3}\frac{(2x+5)}{(x+3)}$	Cancelamos $(x-3)$ tanto del numerador como del denominador
$=(\frac{(2(3)+5)}{((3)+3)})$	Evaluamos la expresión que obtuvimos en $\frac{4}{3}$.
$=\frac{11}{6}$ ■	

3). $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$	Como el denominador es cero, al evaluarlo en $x=0$, en este caso no se puede factorizar.
$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})}$	Multiplicamos tanto el numerador como el denominador por $(1+\sqrt{x+1})$, que es el conjugado de $(1-\sqrt{x+1})$. Este procedimiento también se llama racionalización.
$=\lim_{x\to 0}\frac{1^2-(\sqrt{x+1})^2}{x(1+\sqrt{x+1})}$	Efectuamos la multiplicación en el numerador.
$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})}$	Cancelamos la raíz.
$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(1+\sqrt{x+1})}$	Simplificamos x.

$= \frac{-1}{(1+\sqrt{0+1})}$ Evaluamos la expresión anterior en $x = 0$.

$= -\frac{1}{2}\blacksquare$

También, existen funciones para las cuales no es necesaria la estrategia anterior de usar manipulaciones algebraicas para eliminar las indeterminaciones, como el caso de la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

Si quisieramos calcular por ejemplo $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2-x-2}$ no tendríamos dificultad, de hecho $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2-x-2} = \frac{0^2}{0^2-0-2} = \frac{0}{-2} = 0$.

Notemos que para calcular este límite evaluamos directamente, dado que el denominador es distinto de cero cuando $x = 0$.

4.2.2. Límites indeterminados

Observemos que calcular $\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x^2-x-2}$ o $\lim_{x\to -1} \frac{x^2}{x^2-x-2}$; no es tan sencillo, veamos por qué:

Cuando evaluamos $x^2 - x - 2$ en $x = 2$ o en $x = -1$ obtenemos como resultado cero, luego, intentámos eliminar estas indeterminaciones, factorizando;

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2}{(x-2)(x+1)}$$

En este caso no podemos anular ningún factor, por lo cual no podemos calcular $\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x^2-x-2}$ ni tampoco $\lim_{x\to -1} \frac{x^2}{x^2-x-2}$ usando las propiedades. Para ello, tenemos que recurrir a una tabla de valores como se hizo al comienzo de este capítulo.

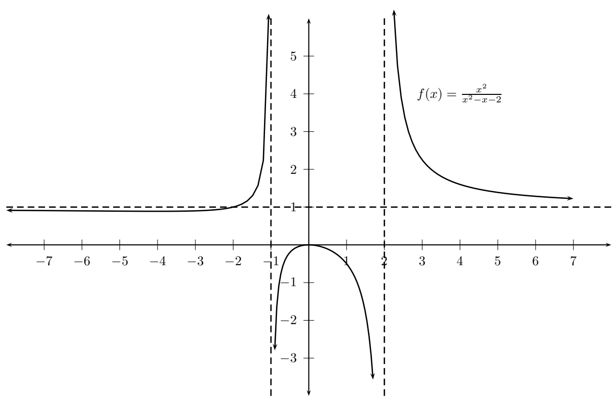
Tomando valores de x cercanos a 2 tanto por derecha como por izquierda.	
x	$\frac{x^2}{x^2-x-2}$
2.01	134.22
2.0001	13 334.22
1.99	-132.44
1.9999	-13 342.44

Tomando valores de x cercanos a -1 tanto por derecha como por izquierda.	
x	$\frac{x^2}{x^2-x-2}$
-0.99	-32,77
-0.9999	-3 332.77
-1.01	33.89
-1.0001	33 333.88

Analizando estos valores, podemos decir que cuando tomamos valores de x cercanos a -1 por la izquierda, la función crece indefinidamente hacia $+\infty$, cuando tomamos valores de x cercanos a -1 por la derecha, la función decrece indefinidamente hacia $-\infty$. Decimos entonces que $\lim_{x\to -1} \frac{x^2}{x^2-x-2}$ *no existe* ya que: $\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x^2-x-2} = \infty$ y $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x^2-x-2} = -\infty$.

Análogamente, cuando tomamos valores de x muy cercanos a 2 por la izquierda, la función decrece indefinidamente hacia $-\infty$, y al tomar valores de x cercanos a 2 por la derecha la función crece indefinidamente hacia $+\infty$; por lo cual, $\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x^2-x-2}$ *no existe* pues también se tiene que: $\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x^2-x-2} = \infty$ y $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x^2-x-2} = -\infty$.

Veamos ahora la gráfica de la función donde se aprecia con más claridad el comportamiento descrito anteriormente.



En este caso decimos que las rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales de la función.

la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

En esta gráfica también se observa que cuando x toma valores muy grandes, es decir, $x \to \infty$, la función se acerca o tiende a 1, lo mismo sucede cuando $x \to -\infty$.

Por lo anterior decimos que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de esta función.

la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la función $f(x)$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

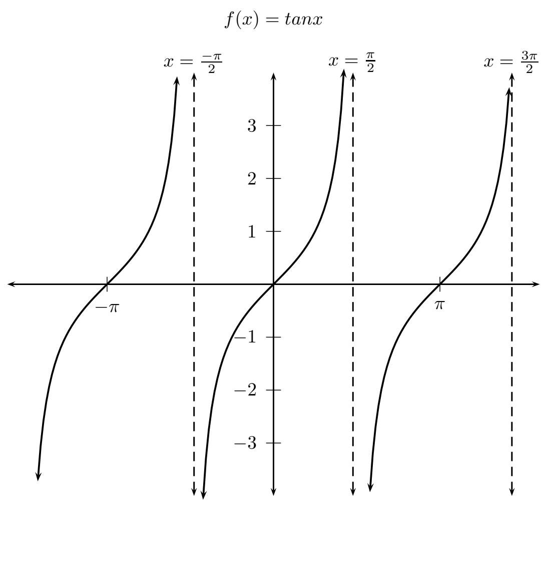
Usando notación de límites, esto se escribe de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1$$

En el capítulo anterior quedó pendiente realizar la gráfica de la función tangente, recordemos que el dominio de la función corresponde a los números reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, veamos entonces, con ayuda de la calculadora qué pasa con la función cuando tomamos valores de x muy cercanos a $\frac{\pi}{2}$ tanto por derecha como por izquierda, (el lector debe hacer el ejercicio) luego se tiene que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tanx = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tanx = \infty$$

Decimos entonces que $x = \frac{\pi}{2}$ es una asíntota vertical para la función $f(x) = tanx$, lo mismo sucede con $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{-\pi}{2}$, $x = \frac{-3\pi}{2}$ y así sucesivamente, observemos la gráfica.



Sea f una función definida en una intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L;$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden acercar a L, si x se incrementa lo suficiente.

Y, si f es una función definida en una intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L;$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden acercar a L, si x toma valores muy negativos.

Para calcular límites al infinito, de funciones racionales, se sugiere dividir tanto el numerador como el denominador de la expresion por la mayor potencia que tenga la variable en el denominador.

Siguiendo con la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-x-2}$, analizada anteriormente, calculemos ahora $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-x-2}$ dividimos tanto numerador como denominador por la mayor potencia del denominador, en este caso es x^2, así:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

para $n > 0$ y k cualquier constante

Tenemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} = 0$, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{1-0-0} = 1.$$

Verificando así el resultado obtenido al observar la gráfica.

Ejemplo

Calculemos ahora $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+5x}{2x^3+4x+1}$

En este caso la mayor potencia del denominador es 3, luego dividimos tanto numerador como denominador por $2x^3$ con lo cual tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+5x}{2x^3+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4}{2x^3}+\frac{5x}{2x^3}}{\frac{2x^3}{2x^3}+\frac{4x}{2x^3}+\frac{1}{2x^3}}$$

Luego realizando las respectivas operaciones con exponentes y simplificando la última expresión obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+5x}{2x^3+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{2}+\frac{5}{2x^2}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{2x^3}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2}+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{2x^2}}{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^3}}$$

como, $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{2x^2}=0$, $\lim_{x\to\infty}1=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0$, y $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^3}=0$

entonces

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+5x}{2x^3+4x+1}=\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2}+0}{1+0+0}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2}=\infty$

Por lo tanto cuando x toma valores muy grandes, la expresión $\frac{3x^4+5x}{2x^3+4x+1}$ va a infinito, es decir, no hay límite.

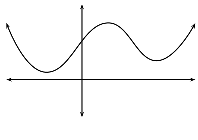
■

4.3. Continuidad

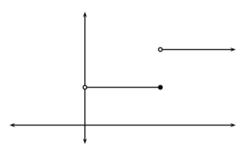
Si observamos la gráfica de una función, una idea intuitiva de continuidad es que una función es continua cuando su gráfica no tiene interrupciones, es decir, "huecos" o vacíos. No todas las funciones tienen esta propiedad, pero las que sí la poseen presentan características especiales que las hacen relevantes en el desarrollo del cálculo.

Analicemos la continuidad de las siguientes funciones, a partir de sus gráficas:

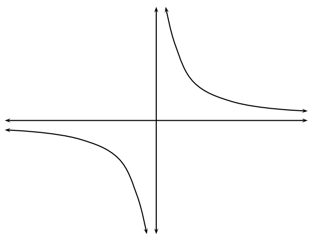
Es continua



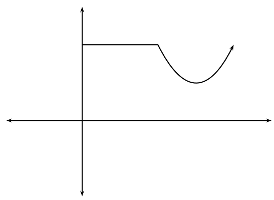
No es continua



No es continua



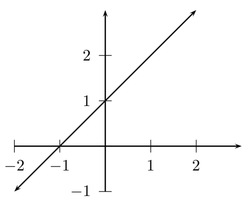
Es continua



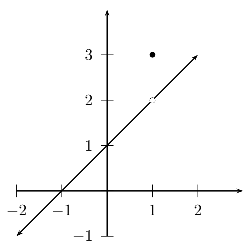
La continuidad de una función está muy relacionada con el concepto de límite que hemos trabajado, comparemos por ejemplo el comportamiento de las funciones,

$$f(x) = x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

cuyas gráficas se muestran a continuación:



$f(x)$



$g(x)$

Cuando $x = 1$ la gráfica de f no tiene interrupciones, mientras que la gráfica de g sí tiene un hueco. Debemos tener en cuenta que tanto f como g están definidas en $x = 1$, esto es, $f(1)$ y $g(1)$, existen, de hecho $f(1) = 2$ y $g(1) = 3$. Sin embargo, f es continua en $x = 1$ y g no es continua en $x = 1$.

Veamos por qué:

Si analizamos los límites laterales cuando x se acerca a 1, tanto en $f(x)$ como en $g(x)$ tenemos:

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ por lo tanto

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1).$$

Ahora, $\lim_{x\to 1^+} g(x) = 2$ y $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 2$ y con esto:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 2.$$

Pero, $g(1) = 3$ y en este caso

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 2 \neq g(1).$$

Por esta razón $g(x)$ no es continua en $x = 1$.

Una función f es continua en $x = a$ si y sólo si, las siguientes tres condiciones se cumplen:

1. $f(x)$ está definida en $x = a$; esto es, a está en el dominio de f o $f(a)$ existe.
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si f está definida en un intervalo abierto que contenga a a, excepto tal vez en a, y f no es continua en a, se dice que f es discontinua en $x = a$, a es llamado punto de discontinuidad.

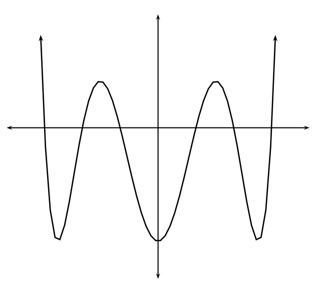
Ejemplo

Mostrar que el polinomio $p(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ es continuo en $x = 1$.

Notese que $p(1)$ existe, además $p(1) = 3(1^4) - 2(1^2) + 1 = 2$.

También tenemos que $\lim_{x\to 1} p(x) = \lim_{x\to 1} 3x^4 - 2x^2 + 1 = 2$ como el $\lim_{x\to 1} p(x)$ existe y también $\lim_{x\to 1} p(x) = p(1) = 2$, decimos que el polinomio $p(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ es continuo en $x = 1$.

Recordemos la gráfica de una función polinómica:



Intuitivamente, decimos que esta función es continua en todos los puntos de su dominio, ya que la gráfica no presenta interrrupciones, y, analíticamente podemos mostrar que para cualquier polinomio de la forma

$$p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n,$$

usando las propiedades para el cálculo de límites, se cumple:

$$\lim_{x \to a} p(x) = b_0 + b_1a + b_2a^2 + \ldots + b_na^n = p(a)$$

Por esta razón, todos los polinomios son continuos en todos los puntos de su dominio.

4.4. Análisis de situaciones

Básicamente la aplicación económica de los límites y la continuidad de funciones la apreciamos al describir lo que le ocurre a las funciones económicas cuando toman determinados valores.
Situación 1:

Un servicio de encomiendas cobra una tarifa de \$3 000 por llevar un paquete de Bogotá a cualquier ciudad de Colombia, si el peso no excede a 2 kilogramos. Cuando la encomienda supera este peso, la empresa cobra una tarifa de \$5 000 más un recargo de \$1 000 por cada kilogramo adicional a los 2 kg, sin embargo, ésta no recibe paquetes que sobrepasen los 10 kg.
La empresa no recibe paquetes que pesen más de 10 kg.

El cobro C por el envío de un paquete está expresado como una función del peso del paquete como:

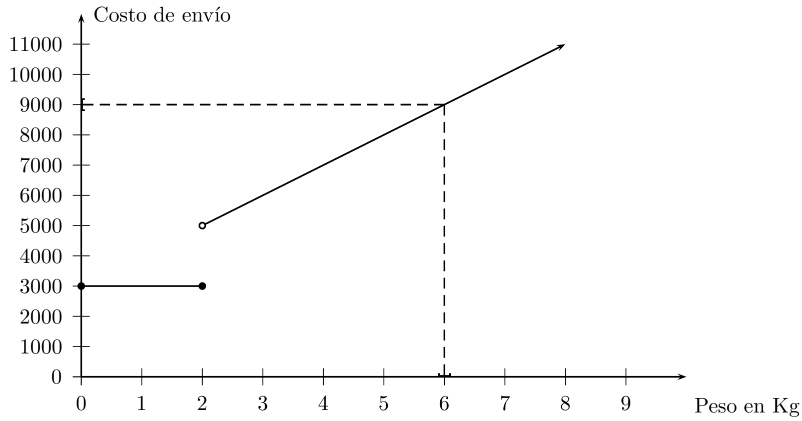
$$C(x) = \begin{cases} 3\ 000 & x \leq 2 \\ 5\ 000 + 1\ 000(x-2) & 2 < x \leq 10 \end{cases}$$

Donde x representa el peso en kg del paquete.

1. Represente gráficamente esta función
2. Indique si la función es continua en $x = 6$.
3. Indique si la función es continua en $x = 2$.
4. Interprete los resultados.

Solución

1. La gráfica de esta función es:



2. Al tomar valores de x muy cercanos a 6 tanto por la derecha como por la izquierda, la función se aproxima a \$9 000 (esto se evidencia en la gráfica), es decir,

$$\lim_{x\to 6^+} f(x) = \lim_{x\to 6^-} f(x) = 9\ 000.$$

Además $f(6) = 9\ 000$, con lo que tenemos que:

$$\lim_{x\to 6} f(x) = f(6) = 9\ 000,$$

con lo cual podemos decir que la función es continua en $x = 6$.

3. Ahora, analicemos el comportamiento de la función al tomar valores de x muy cercanos a 2. Si nos acercamos a $x = 2$ por la derecha, los valores de la función se acercan a \$5 000, que se escribe $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5\ 000$, sin embargo, si nos acercamos a $x = 2$ por la izquierda, los valores de la función se acercan a 3 000 o también $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3\ 000$.

Luego,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x),$$

es decir, que $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe; y esto es una razón suficiente para decir que la función es discontinua en $x = 2$.

4. La función presenta una discontinuidad en $x = 2$, gráficamente se observa un cambio brusco, de hecho, hay una interrupción; también se evidencia una diferencia notable entre el precio de envío de un paquete que pesa 2 kilogramos o menos y otro que pesa más de 2 kilogramos.

Situación 2:

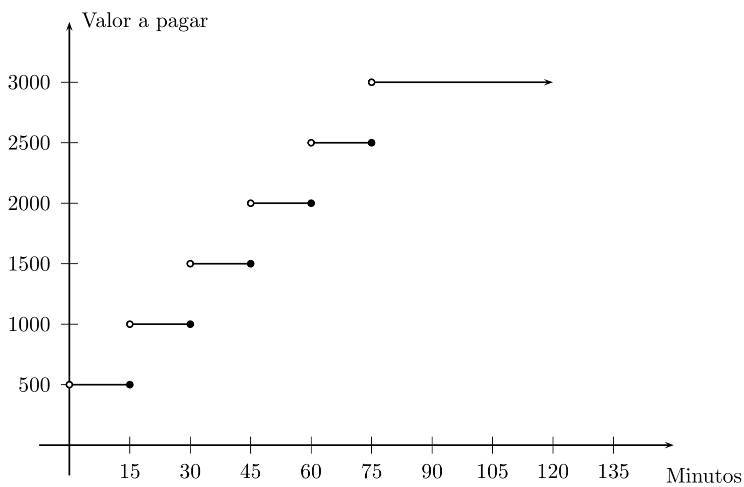
Un parqueadero ofrece las siguientes tarifas:

Cuarto de hora o fracción: \$ 500,
A partir de hora y media hay una tarifa única de \$3 000.

1. Represente gráficamente esta situación.
2. Describa una función que modele esta situación.
3. Analice la continuidad de $f(x)$ en $x = 15$.

Solución

1. A continuación se representa gráficamente esta situación.



2. Observemos que hasta los primeros 15 minutos, un cliente paga \$500, a partir del minuto 16, hasta el minuto 30, el cliente paga \$1 000 y así sucesivamente.

Podemos modelar esta situación mediante la función:

$$f(x) = \begin{cases} 500 & 0 < x \leq 15 \\ 1\ 000 & 15 < x \leq 30 \\ 1\ 500 & 30 < x \leq 45 \\ 2\ 000 & 45 < x \leq 60 \\ 2\ 500 & 60 < x \leq 75 \\ 3\ 000 & x > 75 \end{cases}$$

3. Analicemos ahora los siguientes límites

   - $\lim_{x\to 15^+} f(x)$

     En la gráfica, observamos que cuando x toma valores muy cercanos a 15 por la derecha, la función se aproxima a 1 000, luego podemos decir que $\lim_{x\to 15^+} f(x) = 1\ 000$.
   - $\lim_{x\to 15^-} f(x)$

     Si x toma valores muy cercanos a 15 por la izquierda, la función se aproxima a 500, es decir que $\lim_{x\to 15^-} f(x) = 500$.

$$\lim_{x\to 15^-} f(x) \neq \lim_{x\to 15^-} f(x)$$

Podemos decir entonces que esta función no es continua en $x = 15$, pues a pesar que los límites laterales en $x = 15$ existen, son diferentes, luego no satisfacen las reglas de continuidad.

Observemos que esta función está bien definida en $x = 15$, es decir, $f(15)$ existe, pero la dicontinuidad se evidencia en el salto que da la función al pasar al mínuto número 16, dado que la diferencia de precio con respecto a pasar del minuto 14 al 15 es de \$500.

Notemos también que $x = 15$ no es el único punto donde $f(x)$ presenta discontinuidad. ¿Cuáles son esos puntos?

Situación 3:

Considerando la posibilidad que de la producción total, dos de los artículos sean defectuosos, cierta función de costo se define como

$$C(x) = \frac{16x^2 - 64}{x - 2},$$

para $x \neq 2$, donde x representa el número de artículos producidos (en cientos) y C es el costo de producción (en miles de pesos).

Encontremos e interpretemos los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 4} C(x)$
2. $\lim_{x\to 0} C(x)$
3. $\lim_{x\to 2} C(x)$

Solución

1. Notemos que el cálculo de $\lim_{x\to 4} C(x)$ se puede hacer reemplazando $x = 4$ en la función $C(x) = \frac{16x^2-64}{x-2,}$ dado que se tiene que $\lim_{x\to 4} x - 2 = 2$, que es diferente de 0.

   $\lim_{x\to 4} C(x) = \lim_{x\to 4}\left[\frac{16x^2-64}{x-2}\right] = \frac{\lim_{x\to 4}(16x^2-64)}{\lim_{x\to 4} x-2} = \frac{16(4)^2-64}{4-2} = \frac{192}{2} =$ 96

   Significa que el costo aproximado de 4 artículos es de \$96 000. En éste se incluyen todos los gastos que genera la elaboración de cada uno de los artículos.

2. Lo mismo sucede con $\lim_{x\to 0} C(x)$, como $\lim_{x\to 0} x - 2 = -2$ es diferente de 0, reemplazamos $x = 0$ en la función $C(x)$

   $\lim_{x\to 0} C(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{16x^2-64}{x-2}\right] = \frac{\lim_{x\to 0}(16x^2-64)}{\lim_{x\to 0} x-2} = \frac{16(0)^2-64}{0-2} = \frac{-64}{-2} =$ 32

   El costo que puede prever la empresa para iniciar la producción de los artículos es de \$32 000.

3. El cálculo de $\lim_{x\to 2} C(x)$, debemos hacerlo cuidadosamente, dado que $\lim_{x\to 2} x - 2 = 0$, lo que significa que hay una indeterminación porque el denominador es 0.

$\lim_{x\to 2} C(x) = \lim_{x\to 2}\left[\frac{16x^2-64}{x-2}\right]$	Intentemos cancelar $(x-2)$.
$\lim_{x\to 2}\left[\frac{(4x-8)(4x+8)}{x-2}\right]$	Factorizamos el numerador, como diferencia de cuadrados.
$\lim_{x\to 2}\left[\frac{4(x-2)(4x+8)}{x-2}\right]$	Tomamos 4 como factor común en el primer término del numerador.

$\lim_{x\to 2}\left[\frac{4(4x+8)}{1}\right]$	Cancelamos $x-2$ tanto del numerador como del denominador
$\lim_{x\to 2} 4(4x+8) = 4(4(2)+8) = 64$	Evaluamos la expresión que obtuvimos en $x=2$.

Esta función presenta discontinuidad en $x=2$, dado que existe el límite en este punto, pero la $C(2)$ no existe, esto puede interpretarse como el hecho de que no se pueden producir exactamente 2 artículos ya que estamos trabajando bajo el supuesto, de que para cualquier número de artículos producidos, 2 son defectuosos.

Situación 4:

Una fundación lanza una campaña para reunir fondos. Los encargados de ésta, estiman que el número de semanas necesarias para lograr el $x\,\%$ de su objetivo, está dado por $S(x)=\frac{10x}{150-x}$, donde x representa el porcentaje del dinero recaudado para cumplir su objetivo.

Aproximadamente ¿cuánto tiempo se requiere para alcanzar casi el 100 % de los objetivos de la campaña?

Solución

Nos solicitan el tiempo necesario para alcanzar casi el 100 % de los objetivos, la idea es acercanos tanto como se pueda al 100 %, es decir, $\lim_{x\to 100}\frac{10x}{150-x}$.

$\lim_{x\to 100}\frac{10x}{150-x}=\frac{10(100)}{150-100}=\frac{1000}{50}=20$

Luego se necesitan casi 20 semanas para que con la campaña, se recauden la totalidad de los objetivos.

Situación 5:

Un fabricante es capaz de producir 3 000 unidades por día. Si el costo fijo es \$350 000 (miles) por día y el costo variable 2 000 por unidad producida:

1. Expresar el costo C como una función de la cantidad de unidades producidas.

2. Encontrar $\lim_{x\to 0} C(x)$

3. Describir aproximadamente cuál es el costo de la producción diaria.

Solución

1. $C(x) = 350\ 000 + 2\ 000x$.

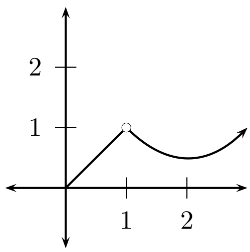
2. $\lim_{x\to 0} C(x) = \lim_{x\to 0} 350\ 000 + 2\ 000x = 350\ 000 + 2\ 000 * (0) = 350\ 000$. En efecto al aproximar a cero, el número de unidades producidas, el costo total coincide con el costo fijo.

3. Una aproximación del costo de producción diario, se tiene cuando x tiende a 3 000 unidades; que es equivalente a:

$$\lim_{x\to 3\ 000} 350\ 000 + 2\ 000x = 350\ 000 + 2\ 000(3\ 000) = 6\ 350\ 000.$$

4.5. Actividades de práctica

1. Observe la gráfica de $f(x)$ y conteste las preguntas.



   a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$
   b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
   c) $\lim_{x\to 2} f(x)$
   d) ¿$f(x)$ es continua en $x = 2$?, explique. ______________________
   ____
   e) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$
   f) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$
   g) $\lim_{x\to 1} f(x)$
   h) ¿$f(x)$ es continua en $x = 1$?, explique. ______________________
   ____

2. La cantidad de relojes de pulso demandada por mes se relaciona con el precio unitario mediante la ecuación

$$P(x) = \frac{50}{0{,}001x^2 + 1}$$

   con $0 \le x \le 20$.

   Donde p está dada en dólares y representa el precio de venta de x unidades y x representa las unidades producidas. Determine:

   a) ¿P(-1) existe? ______________________________
   ____

b) $\lim_{x\to 0} P(x)$

c) $\lim_{x\to 1} P(x)$

d) Interprete el resultado de los límites anteriores. ____________________

3. Un fabricante determina que el costo total para producir un producto está dado por la función: $c(q) = 0{,}5q^2 + 5q + 500$, donde q representa el número de unidades producidas y $c(q)$ el costo de producir las q unidades.

   a) Calcule $\lim_{q\to 0} c(q)$ e interprete el resultado. ____________________

   b) Encuentre $c(q+h)$ e indique qué significa. ____________________

   c) Determine $\lim_{h\to 0} \frac{c(q+h)-c(q)}{h}$ e interprete el resultado. ____________________

4. Represente gráficamente la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

   a) Calcule $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

   b) Calcule $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

   c) Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$

   d) ¿$f(x)$ es continua en $x = 1$? ____________________

   e) ¿En qué puntos la función es discontinua? ____________________

5. El parqueadero de una universidad ofrece una tarifa de \$900 hora o fracción hasta la cuarta hora. Para un tiempo mayor de 4 horas hasta 12 horas cobra una tarifa plena de \$4 000:

   a) Represente gráficamente esta situación.

   b) Plantee una función que permita calcular el valor a pagar para un tiempo determinado; esta función debe estar en terminos de t.

   c) ¿Qué valor debe pagar una persona que deja el carro 3 horas y media? ____________________

   d) ¿Que valor debe pagar una persona que deja el carro 4 horas?, en este caso, ¿cuál es el precio por hora? ____________________

e) ¿Qué valor debe pagar una persona que deja el carro 9 horas?, en este caso, ¿cuál es precio por hora? ______

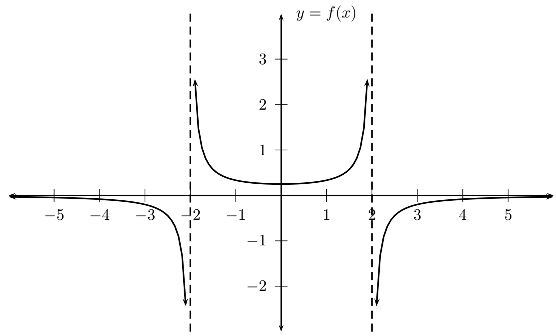
f) ¿Qué valor debe pagar una persona que deja el carro 5 horas? ______

g) ¿Esta función es continua en 4? Explique. ______

h) ¿Esta función es continua en 5? Explique. ______

i) En caso de existir un punto de discontinuidad, ¿que alternativa podríamos usar para eliminar esta discontinuidad? ______

6. Observe la siguiente gráfica y calcule los límites que se indican:



a) $\lim_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$

f) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

g) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

7. Calcule los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x-2}{x^2-1}$

b) $\lim_{x\to 1} 3x^2 - 1$

c) $\lim_{x\to \frac{2}{3}} \frac{9x^2-4}{15x-10}$

d) $\lim_{x\to -4} \frac{3x^2+10x-8}{x+4}$

e) $\lim_{p\to \infty} \frac{5p+3}{2p^2-1}$

f) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

g) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-x-12}{x^2-16}$

h) $\lim_{x\to -\frac{5}{2}} \frac{6x^2+13x-5}{2x+5}$

8. Use las pautas dadas anteriormente para calcular los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to\infty} \frac{-7x^2+5x}{x^2+3x-2}$

   b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{-4x^3-5x}$

   c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+3x}{2x^4-8x^2}$

   d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2}{2x^5+5}$

   e) $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x+4}{6x^3+3x^2}$

9. La siguiente gráfica representa una función $f(x)$; con base en ella determine:

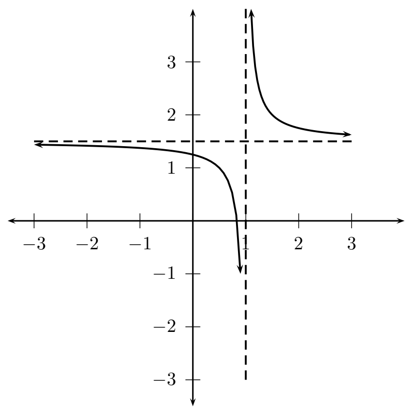
   a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

   b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

   c) $\lim_{x\to1} f(x)$

   d) Una asíntota horizontal.

   e) Una asíntota vertical.



10. La tarifa del servicio de taxi en Bogotá está determinada por unidades, actualmente una unidad cuesta 64 pesos. Cada 100 metros, el taxímetro de los vehículos va sumando una unidad.

    El servicio mínimo que nos puede prestar un taxi (la distancia más corta) es de 50 unidades que cuesta \$ 3 200. Lo cual significa que si el usuario desea ir a un destino que queda bastante cerca, en el cual las unidades en el taxi no alcanzan a llegar a 50, debe pagar \$ 3 200; esto es el costo mínimo por usar el taxi. De acuerdo a ello analice:

    a) ¿Cuánto cuesta una carrera para la cual el taxímetro marca 40 unidades? ______________________________

    ____

    b) ¿Cuánto cuesta una carrera para la cual el taxímetro marca 47 unidades? ______________________________

    ____

    c) ¿Cuánto cuesta una carrera para la cual el taxímetro marca 100 unidades? ______________________________

    ____

d) ¿Cuánto cuesta una carrera para la cual el taxímetro marca 125 unidades? ______

e) Con esta información represente gráficamente esta situación.

f) Determine una función que permita calcular el valor a pagar para ciertas unidades; plantee el valor a pagar en función del número de de unidades.

g) ¿Esta función presenta discontinuidad en algún punto? Explique. ______

11. Represente graficamente una función que satisfaga las siguientes condiciones:

a) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$

d) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x\to \infty} f(x) = -1$

f) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$

Capítulo 5

Derivada

Sin duda, uno de los temas de matemáticas que más se aplica en economía es la derivada. Es utilizada para determinar el producto marginal, elasticidad y adicionalmente para desarrollar los procesos de optimización tanto para el consumidor como para el productor.

En este capítulo trabajaremos la derivada de una función y daremos algunas reglas para calcularla, además ilustraremos algunas de las aplicaciones de la derivada de las funciones de una variable independiente, con énfasis en las aplicaciones económicas.

Aunque el concepto matemático que se usa en economía es la tasa de variación, aquí comenzaremos este tema con un acercamiento gráfico a la noción de derivada.

Recordemos que en el capítulo 3 cuando trabajamos función lineal se dijo que la pendiente de la recta mide el grado de inclinación de la misma; también se dijo que la pendiente es la variación y frente a una variación en x $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, lo cual indica que si deseamos ver la variación de la función lineal que depende de x, cuando hay una pequeña variación en x lo único que debemos hacer es calcular la pendiente.

Sin embargo, la pregunta natural es ¿cómo calculamos la variación de una función cuando hay una pequeña variación en x, si la función no es lineal?

Supongamos que la figura (5.1) es la representación gráfica de una función $f(x)$; podemos observar que esta función no tiene el mismo comportamiento en todo

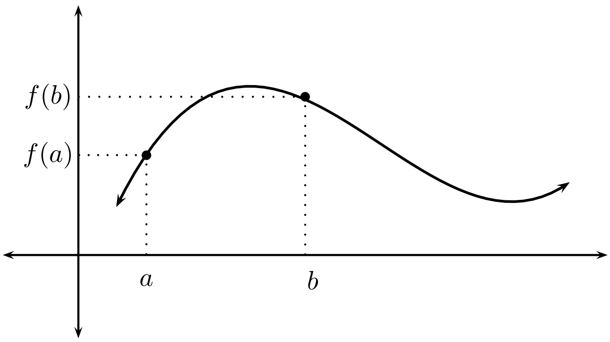


Figura 5.1: gráfica de $f(x)$

su dominio, es decir, en algunos intervalos la función crece y en otros la función decrece.

Sean a y b dos elementos del dominio de f y $f(a)$ y $f(b)$ las respectivas imágenes; observemos que si de a pasamos a b, la función aumenta de $f(a)$ a $f(b)$, pero, ¿qué tanto aumenta?

Para resolver este último interrogante, unimos los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ con una recta secante a la gráfica de $f(x)$, como se observa en la gráfica (5.2); y calculamos su pendiente:

$$m_{sec} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{5.1}$$

Supongamos que h es la distancia entre a y b, luego $h = b - a$ entonces esta recta secante puede transformarse en una recta tangente, tomando un valor para b muy cercano de a; es decir, haciendo que h sea tan cercano a cero como podamos, de esta manera, la pendiente de la recta tangente es el límite cuando h tiende a 0 en la ecuación (5.1); luego tenemos:

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{5.2}$$

Como $h = b - a$ también se tiene que $b = a + h$ entonces (5.2) se puede escribir :

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \tag{5.3}$$

La ecuación (5.3) representa la pendiente de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ que también se escribe como $f'(a)$ y se lee la derivada de f en a y

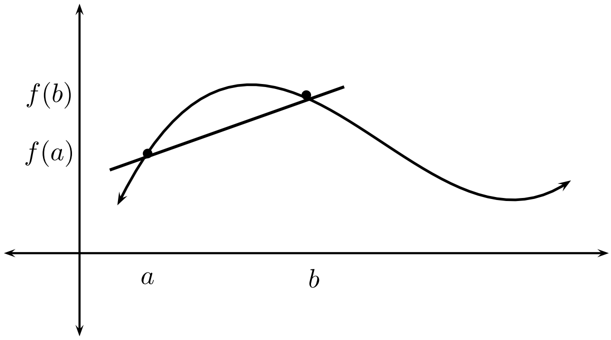


Figura 5.2: interpretación geométrica de la derivada

representa la variación de la función cuando hacemos un pequeño cambio en la variable, pasamos de a a $a+h$.

En general, para cualquier x la derivada de f en x se escribe $f'(x)$ y es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{5.4}$$

si puede encontrarse $f'(x)$, se dice que f es diferenciable; $f'(x)$ también se llama derivada de f con respecto a x y puede escribirse como $\frac{df}{dx}$.

El proceso de encontrar la derivada se llama *diferenciación*.

Ejemplo

Calculemos la derivada de $f(x) = 3x + 5$

Aplicando la fórmula (5.4) tenemos:

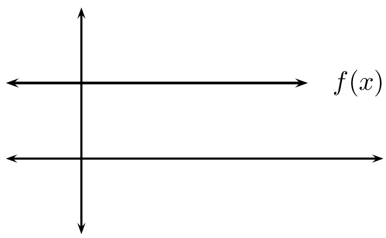
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)+5-(3x+5)}{h}$	Evaluamos la función en $x+h$ y en x.
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3x+3h+5-3x-5}{h}$	Eliminamos paréntesis.
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h}$	Eliminamos términos semejantes.
$f'(x) = \lim_{h\to 0} 3$	Cancelamos h.
$f'(x) = 3$	Usamos propiedad de los límites (capítulo 4).

■

Con este ejemplo se evidencia que cuando tenemos una función lineal su derivada es equivalente a su pendiente.

En general si tenemos $f(x) = mx + b$ entonces $f'(x) = m$.

Observemos la gráfica de la siguiente función:



Podemos decir que esta función no presenta variación, es decir, para cualquier valor de x la función toma el mismo valor k, luego la derivada de esta función es cero (recordemos que en este caso la pendiente es cero).

Entonces si $f(x) = k$ entonces $f'(x) = 0$.

Ejemplo

Calculemos ahora la derivada de $f(x) = x^2$

Aplicando la fórmula (5.4) tenemos:

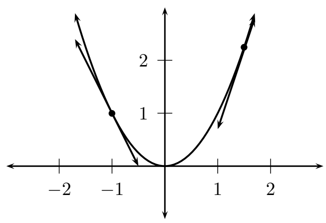
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$	Evaluamos la función en $x+h$ y en x.
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$	Resolvemos el cuadrado.
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$	Eliminamos términos semejantes.
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$	Factorizamos h.
$f'(x) = \lim_{h\to 0} 2x+h$	Simplificamos h.
$f'(x) = 2x$	Aplicamos el límite

■

Podríamos preguntarnos si esto significa que la función tiene la misma razón de cambio en todo su dominio; la respuesta es no, el hecho de que $f'(x) = 2x$ significa que la derivada de la función depende del valor de x que tomemos, veamos:

Observemos que la gráfica de $f(x) = x^2$ decrece para los valores negativos de x y crece para los valores positivos.



Tomemos por ejemplo $x = -1$ y $x = \frac{3}{2}$,

Evidenciamos que en el punto $(-1, 1)$ la recta tangente tiene pendiente negativa, en efecto, en este punto $m = -2$ dado que $f'(-1) = 2(-1) = -2$.

Por otra parte, en el punto $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ la recta tangente tiene pendiente positiva, dado que $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$.

Ejemplo

Calculemos la derivada de $f(x) = x^3$

Usando la ecuación (5.4) tenemos:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} && \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{(x+h)^3-x^3}{h} && \text{Evaluamos la función en } x+h \text{ y en } x. \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} && \text{Resolvemos el binomio al cubo.} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} && \text{Eliminamos términos semejantes.} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} && \text{Factorizamos } h. \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) && \text{Cancelamos } h \text{ tanto del numerador como del denominador.} \\
f'(x) &= 3x^2 && \text{Aplicamos el límite cuando } h \text{ tiende a cero.}
\end{aligned}
$$

■

Después de ver los resultados de las derivadas en los ejemplos anteriores podemos resumirlos en la siguiente tabla:

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

Ahora, la pregunta es ¿podemos continuar la tabla sin necesidad de calcular límites, únicamente observando regularidades?

En efecto, pedemos concluir que si $f(x) = x^4$ entonces, $f'(x) = 4x^3$; o si $f(x) = x^5$ entonces $f'(x) = 5x^4$; en general tenemos:

Derivada de una de una potencia:

Si $f(x) = x^n$ entonces:

$$f'(x) = nx^{n-1} \tag{5.5}$$

siempre que x^{n-1} esté definida. Esto es, la derivada de una potencia es igual al exponente multiplicado por la x elevada a una potencia menor en una unidad que la potencia dada.

Ejemplo

Teniendo en cuenta la propiedad (5.5) calculemos la derivada con respecto a x de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

Sabemos que $f(x) = \sqrt{x}$ también se puede escribir como $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$; en este caso $n = \frac{1}{2}$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

■

Derivada de una constante por una función:

Si f es un función diferenciable y c una constante, entonces $cf(x)$ es diferenciable y

$$\frac{d[cf(x)]}{dx} = cf'(x) \tag{5.6}$$

Esto es, la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Ejemplo

Usemos la expresión (5.6) para calcular la derivada con respecto a x de $f(x) = 5x^7$.

En este caso usamos las expresiones (5.6) y (5.5); en primer lugar observemos que tenemos una constante por una función y en segundo lugar tenemos una potencia.

Entonces, $f'(x) = 5\frac{d[x^7]}{dx} = 5(7x^{7-1}) = 35x^6$. ∎

Derivada de una adición o una sustracción:

Si f y g son funciones diferenciables, entonces $f(x) \pm g(x)$ es diferenciable y

$$\frac{d[(f \pm g)(x)]}{dx} = f'(x) \pm g'(x) \tag{5.7}$$

Esto es, la derivada de una adición es la adición de las derivadas; lo cual también se cumple para la sustración.

Ejemplo

Encontremos la derivada de $f(x) = 9x^{\frac{3}{4}} + 6\sqrt{x}$

$f(x) = 9x^{\frac{3}{4}} + 6x^{\frac{1}{2}}$	Reescribimos la función.
$f'(x) = 9\left[\frac{3}{4}x^{\frac{-1}{4}}\right] + 6\left[\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right]$	Derivamos, aplicando las expresiones (5.5), (5.6) y (5.7).
$f'(x) = \frac{27}{4}x^{\frac{-1}{4}} + \frac{6}{2}x^{\frac{-1}{2}}$	Multiplicamos constantes.
$f'(x) = \frac{27}{4x^{\frac{1}{4}}} + \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}$	Simplificamos y expresamos los exponentes racionales negativos de manera positiva.
$f'(x) = \frac{27}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}$	Simplificamos y expresamos los exponentes racionales negativos de manera positiva.

∎

Derivada de un producto:

Si f y g son funciones diferenciables, entonces $f(x)g(x)$ es diferenciable con respecto a x y

$$\frac{d[(fg)(x)]}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{5.8}$$

es decir; la derivada del producto de dos funciones es la derivada de la primera función por la segunda función, más la primera función por la derivada de la segunda función.

Ejemplo

Hallemos la derivada de $h(x) = 3x(5x - 1)$

En este caso tenemos un producto, cuyo primer factor es $3x$ y el segundo factor es $(5x - 1)$.

$h'(x) = 3(5x - 1) + 3x(5)$	Aplicamos la regla (5.8) para derivar un producto.
$h'(x) = 15x - 3 + 15x$	Multiplicamos término a término
$h'(x) = 30x - 3$	Agrupamos términos semejantes.

■

Ejemplo

Derivemos $f(x) = 7x^3\left(4x^2 + 6x\right)$.

Aplicando la regla (5.8) tenemos:

$$f'(x) = 21x^2\left(4x^2 + 6x\right) + 7x^3\left(8x + 6\right).$$

$$f'(x) = 84x^4 + 126x^3 + 56x^4 + 42x^3.$$

$$f'(x) = 140x^4 + 168x^3.$$

■

Derivada de un cociente:

Si f y g son funciones diferenciables y $g(x) \neq 0$ entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ es diferenciable con respecto a x y

$$\frac{d\left[\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right]}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \tag{5.9}$$

es decir; la derivada del cociente de dos funciones es la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos numerador sin derivar por la derivada del denominador; todo dividido por el cuadrado del denominador.

Ejemplo

Hallemos la derivada de $f(x) = \frac{4x^3-7x}{2x}$.

$f'(x) = \frac{\left(12x^2-7\right)2x-\left(4x^3-7x\right)2}{(2x)^2}$	Aplicamos la regla (5.9) para derivar un cociente.
$f'(x) = \frac{\left(24x^3-14x\right)-\left(8x^3-14x\right)}{(4x^2)}$	Multiplicamos término a término
$f'(x) = \frac{24x^3-14x-8x^3+14x}{4x^2}$	Eliminamos paréntesis.
$f'(x) = \frac{16x^3}{4x^2}$	Eliminamos términos semejantes.
$f'(x) = 4x$	Simplificamos.

■

Supongamos que ahora queremos derivar $f(x) = (5x-3)^2$, en este caso antes de derivar resolvemos el binomio, es decir, $f(x) = (5x)^2 - 2(3)(5x) + 3^2 = 25x^2 - 30x + 9$.

De este modo, para derivar la función $f(x) = 25x^2 - 30x + 9$ sólo usamos (5.5) y (5.7), así la derivada es: $f'(x) = 50x - 30$.

Tomemos otra función similar, por ejemplo, $f(x) = (7x-5)^8$ ¿podemos proceder de la misma manera que en el caso anterior? Aunque efectivamente podemos usar el triángulo de Pascal y expresar $f(x)$ como una adición de términos, matemáticamente esto es muy engorroso; en este caso podemos usar otra alternativa.

Observemos que $f(x) = (7x-5)^8$ es una función compuesta, es decir, primero actúa $7x-5$ y luego la potencia 8, entonces podemos efectuar una sustitución; supongamos que $u = 7x - 5$, entonces la función en términos de u es $f(u) = u^8$.

De esta manera, para obtener la derivada de f con respecto a x primero derivamos $f(u)$ con respecto a u y luego derivamos a u con respecto a x esto es $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$, entonces $\frac{df}{dx} = \frac{d\left(u^8\right)}{du}\frac{d(7x-5)}{dx}$, de donde $\frac{df}{dx} = \left(8u^7\right)(7)$.

De la sustitución anterior tenemos que $u = 7x - 5$, entonces

$$\frac{df}{dx} = 8\,(7x-5)^7\,(7) = 56\,(7x-5)^7$$

Regla de la cadena:

La regla de la cadena afirma que si f es diferenciable en x y g, es una función diferenciable en $f(x)$, entonces la función compuesta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es diferenciable en x, y se escribe como:

$$(g \circ f)'(x) = \frac{d}{dx}\,[g \circ f] = \frac{d\,g(f(x))}{dx} = \frac{d}{dx}\,g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (5.10)$$

o también

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejemplo

Derivemos $g(x) = 2x(3x^4 + 6x)^{\frac{1}{5}}$

$$g'(x) = 2(3x^4+6x)^{\frac{1}{5}} + 2x\left(\tfrac{1}{5}(3x^4+6x)^{\frac{-4}{5}}(12x^3+6)\right)$$

Derivamos, aplicando derivada de una potencia, (5.5), regla del producto (5.8) y regla de la cadena (5.10).

$$g'(x) = 2\sqrt[5]{3x^4+6x} + \frac{2x(12x^3+6)}{5\sqrt[5]{(3x^4+6x)^4}}$$

Expresamos los exponentes racionales como raíz.

■

Generalización de la *derivada de una potencia* (5.5) de la página 186 usando regla de la cadena (5.10):

f es diferenciable en x y g, es una función diferenciable en $f(x)$, donde

$$g(x) = [f(x)]^n$$

entonces:

$$g'(x) = n[f(x)]^{n-1} f'(x) \tag{5.11}$$

Ejemplo

Hallemos la derivada de $f(x) = \sqrt[3]{(4x^5 - 9x)^4}$

$f(x) = \left(4x^5 - 9x\right)^{\frac{4}{3}}$	Reescribimos la función.
$f'(x) = \frac{4}{3}\left(4x^5 - 9x\right)^{\frac{1}{3}}\left(20x^4 - 9\right)$	Derivamos aplicando (5.5) y regla de la cadena (5.10).
$f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4x^5 - 9x}\left(20x^4 - 9\right)$	Expresamos los exponentes racionales como raíz.

Observemos que en este caso $20x^4 - 9$ es la derivada de la expresión $4x^5 - 9x$, usualmente se dice que $20x^4 - 9$ es la derivada interna.

■

Derivada implicita

Si consideramos la función $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 1$, es posible determinar $f'(x)$ con las reglas enunciadas anteriormente, ya que f es una función dada explícitamente en términos de la variable independiente x.

Sin embargo, existen funciones que no están definidas en forma explícita, entre las cuales podemos mencionar las siguientes:

$2x^2y^3 - xy + 7x = 5,$ $\qquad\qquad$ $6xy + 4x^2 + 3 = 2y$

Estas ecuaciones no pueden ser resueltas explícitamente para y en términos de x; se dice que la función f está definida implícitamente por las ecuaciones:

$2x^2[f(x)]^3 - x[f(x)] + 7x = 5$
$6x[f(x)] + 4x^2 + 3 = 2[f(x)]$.

Observemos que ambas expresiones son de la forma general $f(x, y) = 0$. En esta sección nos interesa determinar la derivada de una función dada en forma implícita.

Consideremos cada una de las ecuaciones anteriores y hallemos la derivada en cada caso:
Para $2x^2[f(x)]^3 - x[f(x)] + 7x = 5$

$2x^2[f(x)]^3 - x[f(x)] + 7x - 5 = 0$

Reescribimos la expresión igualándola a cero.

$4x[f(x)]^3 + 2x^2 3[f(x)]^2[f'(x)] - [f(x)] - x[f'(x)] + 7 = 0$

Derivamos a ambos lados de la igualdad con respecto a x usando derivada de un producto y la regla (5.11).

$4x[f(x)]^3 + 6x^2[f(x)]^2[f'(x)] - [f(x)] - x[f'(x)] + 7 = 0$

Multiplicamos constantes.

$4x[f(x)]^3 + \underbrace{6x^2[f(x)]^2[f'(x)]} - [f(x)] - \underbrace{x[f'(x)]} + 7 = 0$

Identificamos los términos que contienen $f'(x)$.

$6x^2[f(x)]^2[f'(x)] - x[f'(x)] = -4x[f(x)]^3 - 7 + [f(x)]$

Dejamos del lado izquierdo de la igualdad únicamente los términos que contienen $f'(x)$.

$\left(6x^2[f(x)]^2 - x\right)[f'(x)] = -4x[f(x)]^3 - 7 + [f(x)]$

Sacamos $f'(x)$ como factor común en el lado izquierdo de la igualdad.

$f'(x) = \frac{-4x[f(x)]^3 - 7 + [f(x)]}{\left(6x^2[f(x)]^2 - x\right)}$

Despejamos $f'(x)$.

Ahora, usemos y en lugar de $f(x)$ y y' en lugar de $f'(x)$ para hallar la derivada (y') de la segunda expresión; $6xy + 4x^2 + 3 = 2y$.

$6xy + 4x^2 + 3 - 2y = 0$

Reescribimos la expresión igualándola a cero.

$6y + 6xy' + 8x - 2y' = 0$

Derivamos a ambos lados de la igualdad con respecto a x usando derivada de un producto y la regla (5.11).

$6xy' - 2y' = -6y - 8x$

Dejamos del lado izquierdo de la igualdad únicamente los términos que contienen y'.

$(6x - 2)y' = -6y - 8x$

Sacamos y' como factor común en el lado izquierdo de la igualdad.

$y' = \frac{-6y-8x}{(6x-2)}$

Despejamos y'.

$y' = \frac{\cancel{2}(-3y-4x)}{\cancel{2}(3x-1)}$

Factorizamos 2 y cancelamos 2.

Ejemplo

Derivemos la expresión $\left(4xy^2 + 2y\right)^2 = 25$

$2\left(4xy^2 + 2y\right)\left(4y^2 + 8xy' + 2y'\right) = 0$

Derivamos a ambos lados de la igualdad con respecto a x usando la regla (5.11).

$2\left(16xy^4 + 8y^3 + 32x^2y^2y' + 16xyy' + 8xy^2y' + 4yy'\right) = 0$

Multiplicamos la expresión anterior término a término.

$32xy^4 + 16y^3 + 64x^2y^2y' + 32xyy' + 16xy^2y' + 8yy' = 0$

Multiplicamos por 2.

$32xy^4 + 16y^3 + \underbrace{64x^2y^2y'} + \underbrace{32xyy'} + \underbrace{16xy^2y'} + \underbrace{8yy'} = 0$

Identificamos los términos que contienen y'.

$64x^2y^2y' + 32xyy' + 16xy^2y' + 8yy' = -32xy^4 - 16y^3$

Dejamos al lado izquierdo de la igualdad, únicamente los términos que contienen y'.

$\left(64x^2y^2 + 32xy + 16xy^2 + 8y\right)y' = -32xy^4 - 16y^3$

Factorizamos y'.

$y' = \frac{-32xy^4-16y^3}{\left(64x^2y^2+32xy+16xy^2+8y\right)}$

Despejamos y'.

$y' = \frac{-4xy^4-2y^3}{\left(8x^2y^2+4xy+2xy^2+y\right)}$

Factorizamos y cancelamos 8.

■

Derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales

Recordemos que en el capítulo 3 se mencionaron e indicaron propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas, por tal razón para cualquier duda, sugerimos al estudiante dirigirse a dicho capítulo.

La derivada de la función exponencial en base e es ella misma; dicho de otra manera, si $f(x) = e^x$ entonces, $f'(x) = e^x$; sin embargo, si la función es compuesta, para hallar la derivada de la función exponencial usamos la regla de la cadena (5.10)que para este caso es igual a la misma función por la derivada del exponente o derivada interna. Es decir:

Si $f(x) = e^{h(x)}$ y $h(x)$ es una función diferenciable en x, entonces,

$$f'(x) = e^{h(x)}.h'(x) \tag{5.12}$$

Ejemplo

Hallemos la derivada de

1. $f(x) = e^{3x^2+1}$
2. $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

Solución:

En ambos casos tenemos una función exponencial compuesta, por lo tanto, usamos la regla (5.12):

1. $f'(x) = e^{3x^2+1}(6x) = 6xe^{3x^2+1}$
2. $f'(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{0*\sqrt{x}-1\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}\right)$ En este caso para la derivada interna usamos la derivada de un cociente (5.9).

$f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\right)$ Simplificamos.

$f'(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\right)$ Multiplicamos.

$f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{2x^{\frac{3}{2}}}$

■

Recordemos ahora que $y = e^x$ si y sólo si $lny = x$. Con base en esto, hallemos la derivada (y') de $y = lnx$.

$y = lnx$ es equivalente a $e^y = x$	Como aún no sabemos hallar la derivada de lnx usamos una derivada implícita para hallar y' en $e^y = x$.
$e^y y' = 1$	Derivamos con respecto a x, en ambos lados de la igualdad.
$y' = \frac{1}{e^y}$	Despejamos y'.
$y' = \frac{1}{x}$	Reemplazamos e^y por x.

En caso de tener una función compuesta, para hallar la derivada de la función logaritmo natural, usamos la regla de la cadena (5.10) y en este caso la derivada es:

Si $f(x) = ln\,(h(x))$ y $h(x)$ es una función diferenciable en x con $h(x) \neq 0$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{h(x)}.h'(x) \tag{5.13}$$

Ejemplo

Hallemos la derivada de

1. $f(x) = Ln\left(x^2 + 3x\right)$
2. $h(x) = Ln\left(\frac{3x-2}{5x+4}\right)$

Solución:

En los dos casos debemos usar la regla (5.13):

1. $f'(x) = \frac{1}{x^2+3x}(2x+3) = \frac{(2x+3)}{x^2+3x}$.
2. Para el segundo caso, antes de derivar podemos usar la propiedad de logaritmo, que nos indica que, el logaritmo de un cociente es la resta del

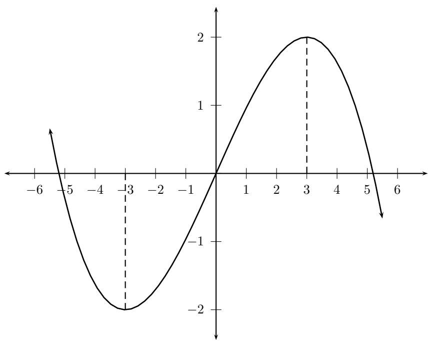
logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$h(x) = Ln\left(\frac{3x-2}{5x+4}\right) = Ln(3x-2) - Ln(5x+4)$	Aplicamos propiedad de logaritmo .
$h'(x) = \frac{1}{3x-2}3 - \frac{1}{5x+4}5$	Derivamos con respecto a x usando la regla (5.13)
$h'(x) = \frac{3}{3x-2} - \frac{5}{5x+4}$	Multiplicamos.

■

5.1. Trazado de curvas

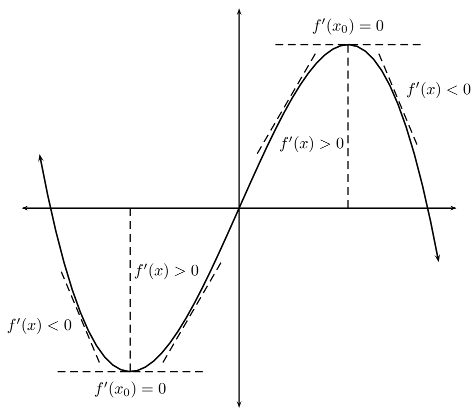
Supongamos que la siguiente figura es la representación gráfica de una función cualquiera f,



Podemos observar que la gráfica de esta función no tiene el mismo comportamiento en todo su dominio; por ejemplo, la función es creciente desde $x = -3$ hasta $x = 3$, mientras que desde $-\infty$ hasta $x = -3$ la función decrece y lo mismo sucede desde $x = 3$ hasta ∞.

También se evidencia que hay valores de x en los cuales la función cambia de decreciente a creciente y viceversa; estos valores son $x = -3$ y $x = 3$.

El crecimiento o decrecimiento de una función está directamente relacionado con el comportamiento de la derivada, en la siguiente gráfica podemos observar que en los tramos en los cuales la función es decreciente las rectas tangentes tienen pendiente negativa, donde la función es creciente las rectas tangentes tienen pendiente positiva; por último, las rectas tangentes a los puntos en los cuales hay cambio del sentido de crecimiento tienen pendiente cero.



Se dice entonces que, una función es creciente en un intervalo si $f'(x) > 0$ para todo x que pertenece al intervalo.

Una función es decreciente en un intervalo si $f'(x) < 0$ para todo x que pertenece al intervalo.

Si $f'(x_0) = 0$ se dice entonces que x_0 es un punto crítico de f.

Si x_0 es un punto crítico de f y la función cambia de creciente a decreciente al pasar por x_0 entonces en x_0 la función toma un máximo relativo.

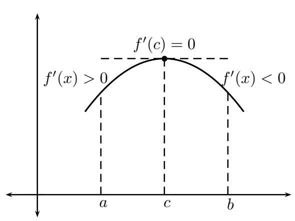
Si x_0 es un punto crítico de f y la función cambia de decreciente a creciente al pasar por x_0, entonces en x_0, la función toma un mínimo relativo.

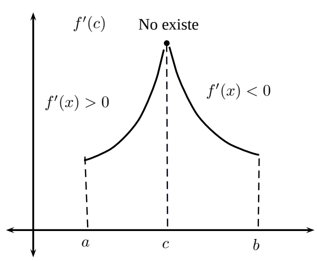
Sea f una función continua en un intervalo I; sean a, b, c puntos de I, tales que $a < c < b$; c es un punto crítico de f si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

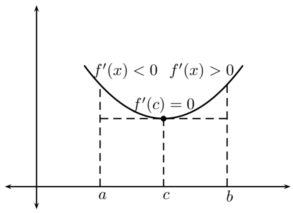
Entonces:

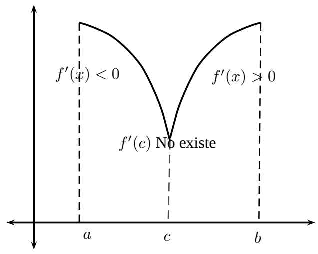
1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para todo x en (c, b), entonces, $f(c)$ es un máximo relativo.
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para todo x en (c, b), entonces, $f(c)$ es un mínimo relativo.
3. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para todo x en (c, b), entonces, $f(c)$ no es un mínimo relativo.
4. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para todo x en (c, b), entonces, $f(c)$ no es un mínimo relativo.

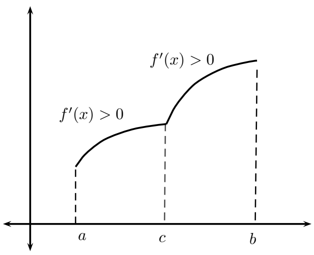
Observemos las gráficas:

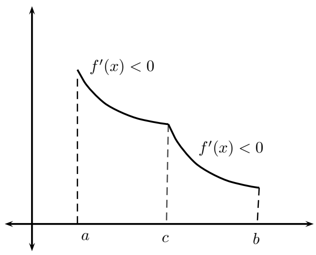
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

Ejemplo

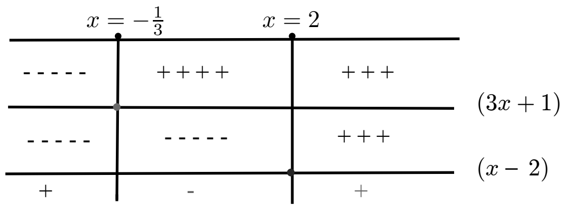
Analizar y trazar la gráfica de $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + 1$.

Solución:

$f'(x) = 3x^2 - \cancel{2}\frac{5}{\cancel{2}}x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$	Para analizar el comportamiento de la función hallamos la derivada.
$3x^2 - 5x - 2 = 0$	Encontramos los puntos críticos de la función igualando a cero la derivada.
$(3x + 1)(x - 2) = 0$	Factorizamos.

Según la factorización, los puntos críticos de la función son $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 2$.

Nos inteteresa ahora analizar el comportamiento del producto de los factores $(3x + 1)$ y $(x - 2)$; por ejemplo, si los dos son negativos su producto es positivo, o si uno es positivo y otro negativo el producto será negativo; de esta manera debemos contemplar todas las posibilidades como se evidencia en el siguiente diagrama de signos (generalmente conocido como el cementerio).

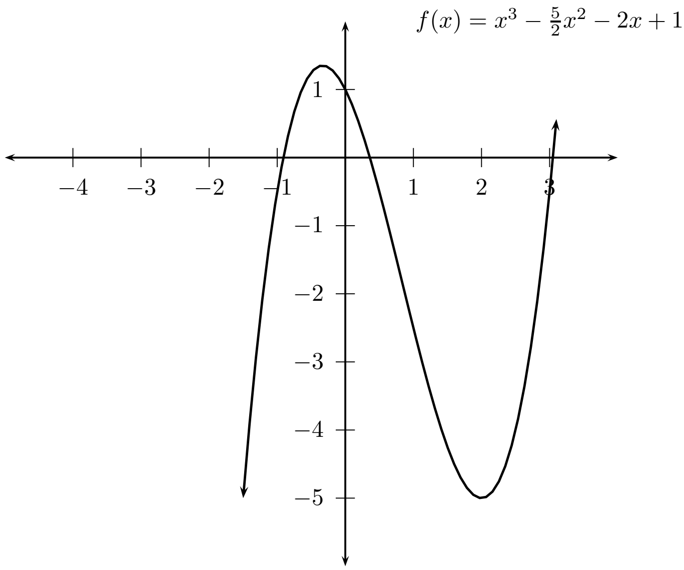


Este diagrama de signos nos indica que $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -\frac{1}{3})$ y $(2, \infty)$ dado que su derivada es positiva y es decreciente en el intervalo $(-\frac{1}{3}, 2)$; intervalo en el cual la derivada es negativa.

En el punto $x = -\frac{1}{3}$ la función deja de ser creciente y pasa a ser decreciente, luego en este punto la función alcanza un valor máximo $(f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{73}{54} \approx 1{,}35)$.

En el punto $x = 2$ la función deja de ser decreciente y pasa a ser creciente, luego en este punto la función alcanza un valor mínimo $(f\,(2) = -5)$.

Para trazar la gráfica de la función usamos la información anterior, además podemos tomar el punto $(0, f(0)) = (0, 1)$ que es el punto de corte de la gráfica con el eje y, observamos a continuación la gráfica.



■

Ejemplo

Tracemos la gráfica de $f(x) = x^2e^x$.

Solución:

$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$	Para analizar el comportamiento de la función hallamos la derivada.
$2xe^x + x^2e^x = 0$	Encontramoslos puntos críticos de la función igualando a cero la derivada
$e^x(2x + x^2) = 0$	Factorizamos.
$e^x x(2 + x) = 0$	Factorizamos completamente.

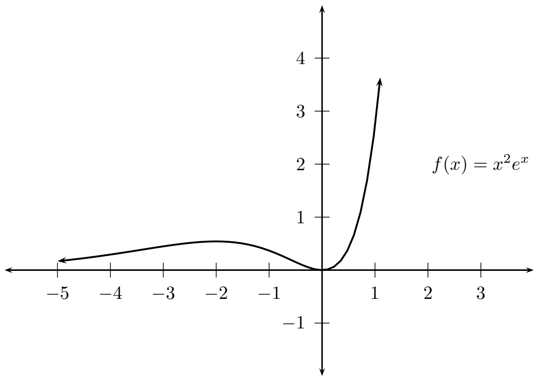
Recordemos que la función $f(x) = e^x$ es una función positiva, es decir, en ningún punto se hace cero, luego tenemos que centrar nuestro análisis únicamente en los factores x y $(2 + x)$. A continuación se muestra el diagrama de signos para $x(2 + x)$

	$x = -2$		$x = 0$		
- - -		- - -		+ + +	x
- - -		+ + +		+ + +	$(2 + x)$
+ + +		- - -		+ + +	$x(2 + x)$

Observamos entonces que la función $f(x) = x^2e^x$ es:

$-$Creciente $(-\infty, -2)$ y $(0, \infty)$
$-$Decreciente $(-2, 0)$

Toma un máximo local en $x = -2$ que es $f(-2) = (-2)^2e^{-2} = 0{,}54$ y un mínimo local en $x = 0$ que es $f(0) = (0)^2e^0 = 0$. Veamos entonces la gráfica:



■

5.1.1. Derivadas de orden superior

Sabemos que la derivada de una función $y = f(x)$ es a su vez una función $f'(x)$. Ahora, si derivamos $f'(x)$, la función resultante se llama segunda derivada de f con respecto a x y se denota con $f''(x)$.

De manera similar, la derivada de la segunda derivada se llama tercera derivada de f con respecto a x y se escribe $f'''(x)$. Continuando de esta manera, obtenemos *derivadas de orden superior*.

Ejemplo

Hallemos la tercera derivada de $h(z) = 5z^6 - 7z^3 + 9z$:

$h'(z) = 30z^5 - 21z^2 + 9$

$h''(z) = 150z^4 - 42z$

$h'''(z) = 600z^3 - 42$

■

Ejemplo

Hallemos la segunda derivada de $f(x) = Ln\left(3x^2 + 2x + 1\right)$.

$f'(x) = \frac{1}{3x^2+2x+1}(6x+2)$	Derivamos usando regla de la cadena .
$f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x+1}$	Efectuamos la multiplicación.
$f''(x) = \frac{6\left(3x^2+2x+1\right)-(6x+2)(6x+2)}{(3x^2+2x+1)^2}$	Hallamos la segunda derivada usando la derivada de un cociente
$f''(x) = \frac{18x^2+12x+6-36x^2-12x-12x-4}{(3x^2+2x+1)^2}$	Efectuamos la multiplicación.
$f''(x) = \frac{-18x^2-12x+2}{(3x^2+2x+1)^2}$	Adicionamos términos semejantes.

■

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos relativos

Sea f una función con su primera derivada definida, al menos, en un intervalo abierto que contiene al número a. Si f'' está definida entonces se cumple:

- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces, f tiene un máximo local en a, que es $f(a)$.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces, f tiene un mínimo local en a, que es $f(a)$.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$ entonces, f no tiene ni un máximo ni un mínimo local en $x = a$, simplemente se dice que a es un punto de inflexión de f.

Ejemplo

Retomemos la función $f(x) = x^2e^x$ analizada anteriormente, para la cual $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$ y sus puntos críticos son $x = -2$ y $x = 0$. Ahora, clasifiquemos estos puntos críticos usando el criterio de la segunda derivada.

$$f''(x) = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$$

Tenemos que evaluar los puntos críticos ($x = -2$ y $x = 0$) en $f''(x)$ para determinar si corresponden a un valor máximo o a un valor mínimo.

$f''(0) = 2e^0 + 4(0)e^0 + 0^2e^0 = 2 > 0$ entonces, en $x = 0$ la función toma un valor mínimo local.

$f''(-2) = 2e^{-2} + 4(-2)e^{-2} + (-2)^2e^{-2} = e^{-2}(2 - 8 + 4) = -2e^{-2} = -0{,}27 < 0$, luego, en $x = -2$ la función toma un máximo local.

Observemos que esto coincide con el resultado expuesto anteriormente en la gráfica.

■

Ejemplo

Hallemos los puntos críticos de $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$, usando el criterio de la segunda derivada para clasificarlos.

$f'(x) = 4x^3 - x^2 - 3x$	Derivamos la función .
$4x^3 - x^2 - 3x = 0$	Igualamos la derivada a cero para hallar los puntos críticos.
$x\left(4x^2 - x - 3\right) = 0$	Factorizamos x.
$x\,(4x+3)\,(x-1) = 0$	Factorizamos completamente.
$x = 0$, $x = -\frac{3}{4}$, $x = 1$	Identificamos los puntos críticos.

El siguiente paso es usar la segunda derivada para clasificar los puntos críticos.

$$f''(x) = 12x^2 - 2x - 3$$

Ahora, evaluamos en cero:

$f''(0) = 12(0)^2 - 2(0) - 3 = -3 < 0$, lo que significa que en $x = 0$ la función toma un máximo local que es $f(0) = 0$

$f''\left(-\frac{3}{4}\right) = 12\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 2\left(-\frac{3}{4}\right) - 3 = \frac{21}{4} > 0.$

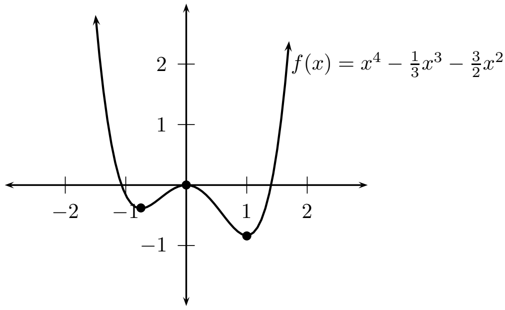
Entonces en $x = -\frac{3}{4}$ la función toma un mínimo local que es:

$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)^4 - \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{81}{256} + \frac{9}{64} - \frac{27}{32} = \frac{81+36-216}{256} = -\frac{99}{256}$

$f''(1) = 12(1)^2 - 2(1) - 3 = 7 > 0$ en este caso también en $x = 1$ la función toma un mínimo local que es:

$f\,(1) = (1)^4 - \frac{1}{3}\,(1)^3 - \frac{3}{2}\,(1)^2 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{6-2-9}{6} = -\frac{5}{6}.$

Observemos la gráfica.



■

5.2. Análisis de situaciones

Si $f(x)$ representa cualquier cantidad como costo, ingreso, utilidad, o pérdida por la venta de x artículos, $f'(x)$ se llama la cantidad marginal. Entonces, el costo marginal mide la tasa de cambio del costo .

En la realidad el conjunto formado por los valores que toman las variables económicas tales como precio, costo, oferta, demanda y beneficio, es un conjunto finito; sin embargo, con el fin de aprovechar las bondades del cálculo diferencial, supondremos que los valores de las mencionadas variables son números reales.

Situación 1:

Costo marginal

La función de costo total de un fabricante, nos da el costo total c de producir y comerciar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama costo marginal. Así,

$$Costo \quad marginal = \frac{dc}{dq} = c'(q)$$

Es decir, el costo marginal representa la velocidad instantánea o tasa con la cual aumenta o disminuye el costo del bien en el nivel de producción (el costo aproximado del siguiente artículo).

Debemos tener en cuenta que costo marginal es distinto al costo promedio, ya que este último es el promedio de los x primeros artículos.

Por ejemplo, si la ecuación del costo promedio de un fabricante es

$$\overline{c}(q) = 0{,}0001q^2 - 0{,}02q + 5 + \frac{5000}{q}$$

1. Encontremos la función de costo marginal.

2. ¿Cuál es el costo marginal cuando se producen 50 unidades?

Solución:

La función de costo marginal es la derivada de la función de costo total c, para esto, debemos encontrar primero c para lo cual multiplicamos $\overline{c}$ por q ($\overline{c} = \frac{c}{q}$).

$\overline{c}q = c$ entonce;s $c(q) = \left(0{,}0001q^2 - 0{,}02q + 5 + \frac{5000}{q}\right) q$

$$c(q) = 0{,}0001q^3 - 0{,}02q^2 + 5q + 5000$$

Derivamos para hallar la función de costo marginal, que está dada por:

$$c'(q) = 0{,}0003q^2 - 0{,}04q + 5$$

Ahora, deseamos saber cuál es el costo marginal cuando se producen 50 unidades, para esto, evaluamos la función $c'(q)$ en $q = 50$

$$c'(50) = 0{,}0003(50)^2 - 0{,}04(50) + 5 = 3{,}75$$

Interpretación:

Si c es el precio y la producción se incrementa en 1 unidad, es decir, pasa de $q = 50$ a $q = 51$, el costo de la unidad adicional es aproximadamente de 3,75. Podemos decir entonces, que si la producción se incrementa $\frac{1}{4}$ de unidad desde $q = 50$, el costo de la producción adicional es aproximadamente de $\frac{1}{4}(3{,}75) = 0{,}94$.

Situación 2 :

Supongamos que $I(q)$ es la función de ingreso total de un fabricante, entonces $I(q)$ representa el valor total recibido al vender q unidades de un producto. El ingreso marginal es la razón de cambio del valor total recibido con respecto al número total de unidades vendidas. Por lo tanto, el ingreso marginal es la derivada de I con respecto a q.

$$Ingreso \quad marginal = \frac{dI}{dq} = I'(q)$$

También Lo podemos interpretar como el ingreso aproximado recibido al vender una unidad adicional de producción.

Supongamos que la función de demanda de un cierto bien está dada por $p(q) = \frac{400}{q+2}$. Determinemos

1. La función de ingreso.
2. La función de ingreso marginal
3. ¿Cuál es el ingreso marginal para 100 unidades?

Solución:

1. La función de ingreso I(q), se obtiene multiplicando el precio unitario de venta p por el número de unidades a vender q; es decir,

$$I(q) = pq = p(q) = \frac{400}{q+2}q = p(q) = \frac{400q}{q+2}, \qquad q \geq 0$$

2. La función de ingreso marginal es la derivada de la función de ingreso, en consecuencia se tiene:

$$I'(q) = \frac{400(q+2) - 400q(1)}{(q+2)^2} = \frac{\cancel{400q} + 800 - \cancel{400q}}{(q+2)^2} = \frac{800}{(q+2)^2}.$$

3. Ahora, para calcular el ingreso mensual de 100 unidades sólo evaluamos $I'(100) = \frac{800}{(100+2)^2} = \frac{800}{10404} \approx 0{,}077$. Lo cual indica que realmente para el productor no es rentable pasar de 100 a 101 unidades ya que el ingreso adicional es muy bajo (0,077).

Podemos complementar nuestro análisis observando la gráfica de la función de ingreso, para esto usamos $I'(q) = \frac{800}{(q+2)^2}$ la cual nos indica que un punto crítico para $I(q)$ es $q = -2$ dado que para este valor $I'(q)$ no existe; sin embargo, recordemos que la función $I(q)$ sólo está definida para valores no negativos de q ya que q representa las unidades producidas.

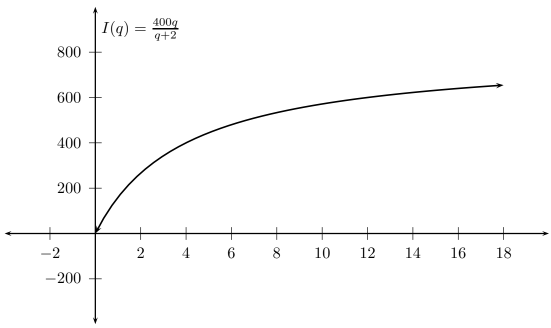
Ahora, haciendo caso omiso de esta restricción, veamos cómo se comporta el signo de $I'(q)$ para valores mayores y menores a $q = -2$. $I'(q)$ es un cociente, pero dado que el númerador es una constante positiva no afecta el signo de $I'(q)$ es decir, únicamente nos interesa el signo de $(q+2)^2$.

Debemos tener en cuenta que independientemente del valor que tome q la expresión $(q+2)^2$ es positiva, pues cualquier número elevado a una potencia par es positivo, entonces, el diagrama de signos es:

$$\overline{+ + + + + \quad | \quad + + + + +} \quad (q+2)^2$$

Lo que significa que para cualquier valor de q la función de ingreso es creciente.

Si observamos la gráfica de $I(q)$, evidenciamos que aunque siempre es creciente, para los primeros valores de q la función crece más rapidamente, pero a medida que q aumenta el comportamiento es casi constante luego para valores grandes de q no es muy representativo el ingreso de producir una unidad adicional, como se evidenció en nuestro anterior análisis de la función.



Situación 3:

Beneficio marginal:

La función de beneficio total de un fabricante, $B(q)$, nos da el beneficio de producir y vender q unidades de un producto. La razón de cambio de B con respecto a q se llama *beneficio marginal*. Así,

$$\text{Beneficio marginal} = \frac{dB}{dq}$$

Por ejemplo, si la ecuación de demanda para cierto bien es, $p = 600e^{-\frac{q}{100}}$, $q \geq 0$ y la de costo es $c(q) = 700ln(q+1) + 800$, $q \geq 0$. Determinemos:

1. La función de beneficio.

2. La función de beneficio marginal

3. La tasa con la cual varía el beneficio en el nivel de producción de 80 unidades.

Solución:

En primer lugar, analicemos la función de beneficio

$$B(q) = Ingreso - Costo = I(q) - c(q)$$

donde $I(q) = pq$ y $c(q)$ está dado.

$I(q) = pq = 600e^{-\frac{q}{100}}q = 600qe^{-\frac{q}{100}}$
entonces,
$B(q) = 600qe^{-\frac{q}{100}} - (700ln(q+1) + 800) = 600qe^{-\frac{q}{100}} - 700ln(q+1) - 800.$

Hallar la función de beneficio marginal es simplemente derivar la función de beneficio:

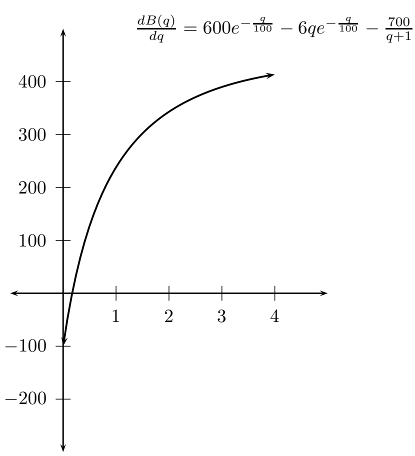
$\frac{dB}{dq} = 600e^{-\frac{q}{100}} + 600qe^{-\frac{q}{100}}\left(\frac{-1}{100}\right) - \frac{700}{q+1} = 600e^{-\frac{q}{100}} - 6qe^{-\frac{q}{100}} - \frac{700}{q+1}$

Analizar el signo de la derivada de la función de beneficio resulta un poco tedioso dado que no es fácil factorizar esta última expresión, sin embargo, podemos decir que la función de beneficio marginal está definida únicamente para valores positivos de q (q representa cantidades), además cuando evaluamos la función de ingreso marginal en cero tenemos un resultado de -100 porque

$\frac{dB}{dq}(0) = 600e^{-\frac{0}{100}} - 6(0)e^{-\frac{0}{100}} - \frac{700}{0+1} = 600e^{0} - 6(0)e^{0} - 700 = 600 - 700 = -100.$

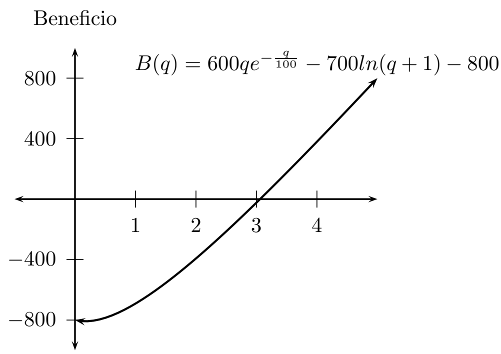
Tomando otros valores (con la ayuda de excel) y evaluando podemos hacer la siguiente tabla para analizar el comportamiento de la función beneficio marginal.

q	$\frac{dB}{dq}(q)$
0	-100
0,1	-37,56
0,15	-10,49
0,17	-0,32
0,18	4,63
0,2	14,27
0,3	57,95
0,5	127,36
1	238,11
2	343,06
3	389,85
4	413,48



Con base a estos valores podemos representar gráficamente la función de ingreso marginal; teniendo en cuenta tanto la tabla como la gráfica decimos que la función $\frac{dB}{dq}(q) < 0$ en el intervalo $(0, 0, 175)$ y que $\frac{dB}{dq}(q) > 0$ en el intervalo $(0{,}175, \infty)$.

Lo que quiere decir que la función de beneficio es decreciente en el intervalo $(0, 0{,}175)$ y creciente en el intervalo $(0{,}175, \infty)$ como se evidencia en la siguiente gráfica. Sin embargo, como q representa las unidades producidas y en la práctica es imposible producir menos de una unidad, podemos decir que la función de beneficio siempre es creciente.



Optimización de las funciones de costo, ingreso y beneficio.

Cuando hablamos de las funciones económicas costo, ingreso y beneficio, queremos alcanzar el mejor resultado del proceso productivo, y esto se logra alcanzando el costo mínimo, el ingreso máximo y el beneficio máximo.

Situación 4:

La ecuación de la demanda de un cierto bien es $p = 400 + 2q$, mientras que la función de costo es $C(q) = 0{,}2q^2 + 4q + 400$. Obtener:

1. El costo mínimo.
2. El ingreso máximo.
3. El beneficio máximo.

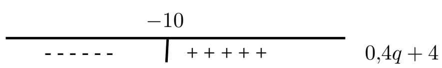
Solución

1. Para hallar el mínimo de la función costo lo primero que hacemos es derivar con respecto a q la función $C(q) = 0{,}2q^2 + 4q + 400$, luego la igualamos a cero para hallar los puntos críticos:

   $C'(q) = 0{,}4q + 4$
   $0{,}4q + 4 = 0$ despejando q tenemos: $q = \frac{-4}{0{,}4} = -10$.

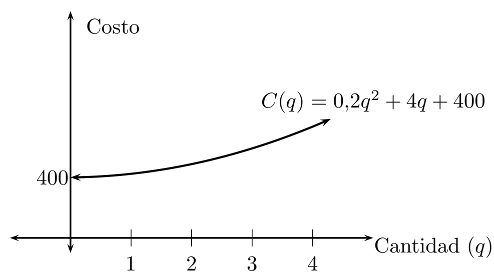
   En este caso, $q = -10$ no pertenece al dominio de la función costo, ya que como se ha dicho antes q representa el número de unidades producidas luego $q \in [0, \infty)$, lo que significa que $q = -10$ no pertenece a este intervalo, y por ende no es un punto crítico para la función costo.

   El diagrama de signos para $C'(q)$ es:



   Se concluye entonces, que el único punto crítico de la función $C(q)$ es el extremo inferior del intervalo $[0, \infty)$, es decir, $q = 0$. Como $C'(q) > 0$ para cualquier valor de q en $[0, \infty)$, la función $C(q)$ es creciente en este intervalo y por lo tanto en $q = 0$ dicha función alcanza un mínimo relativo.

   Observemos la gráfica de $C(q)$



   Se evidencia que el mínimo relativo es a su vez también absoluto, cuyo valor es C(0) = 400.

   En resumen, la función de costo alcanza su valor mínimo de 400 en el nivel de producción $q = 0$.

2. El ingreso máximo

La función de ingreso $I(q)$ es:

$$I(q) = p.q = (400 - 2q)p = 400q - 2q^2$$

donde $q \in [0, \infty)$, derivando para obtener los puntos críticos, tenemos:

$$I'(q) = 400 - 4q$$

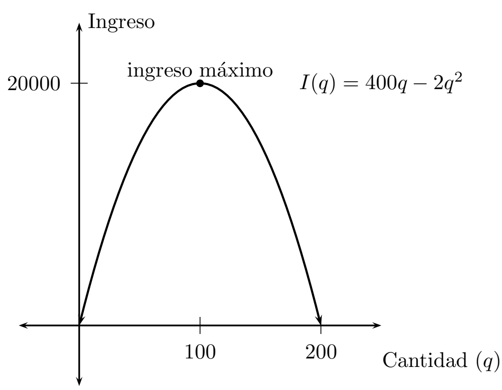
con $q \in [0, \infty)$; igualando a cero y despejando q $(400 - 4q = 0)$ encontramos que $q = 100$.

Analicemos ahora el signo de $I'(q)$:

	100		
+ + + + +		- - - - - -	$400 - 4q$

Aquí observamos que la función $I(q)$ es creciente en el intervalo $[0, 100)$ y decreciente en $(100, \infty)$. Con lo que podemos decir que en $q = 0$ la función $I(q)$ alcanza un mínimo relativo (no absoluto) cuyo valor es $I(0) = 0$, mientras que en $q = 100$ la función alcanza un máximo relativo (que a su vez es máximo absoluto). Este valor máximo es $I(100) = 20000$. En conclusión, el ingreso máximo es de 20000 y ocurre cuando el nivel de ventas es de $q = 100$ unidades.

Usando la información anterior podemos construir la gráfica de la función ingreso.



En esta gráfica se observa que para el ingreso de esta compañía es rentable producir hasta 100 unidades, a partir de este punto el ingreso disminuye.

3. El beneficio máximo.

La función de beneficio está dada por:

$$B(q) = I(q) - C(q) = (400q - 2q^2) - (0,2q^2 + 4q + 400)$$

$$B(q) = 400q - 2q^2 - 0,2q^2 - 4q - 400 = -2,2q^2 + 396q - 400.$$

con $q \in [0, \infty)$.

Para maximizar esta función procedemos de igual manera que en los casos anteriores, es decir, primero derivamos y luego igualamos a cero para hallar los puntos críticos.

$$B'(q) = -4{,}4q + 396$$

Resolvemos ahora $-4{,}4q + 396 = 0$ con lo que obtenemos que un punto crítico para la función de beneficio es $q = \frac{-396}{-4{,}4} = 90$

Usando el diagrama de signos para ver el comportamiento de $I'(q)$ tenemos:

$$\begin{array}{cccl} & 90 & & \\ \hline + + + + + & | & - - - - - - & -4{,}4q + 396 \end{array}$$

Con lo que podemos decir que la función $B(q)$ es creciente en el intervalo $[0, 90)$ y decreciente en $(90, \infty)$. También podemos afirmar que en $q = 90$ la función alcanza un máximo relativo (que a su vez es máximo absoluto). Este valor máximo es $B(90) = 17420$. Entonces, el ingreso máximo es de 17420, y ocurre cuando el nivel de ventas es de $q = 90$ unidades.

Situación 5:

La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = \frac{q^2}{3} - 200q + 600$ y la función de costo total es $C(q) = \frac{5q^3}{3} + 400q^2 - 25\ 000q + 10\ 000$; encontremos, la producción y el precio que maximizarán la utilidad y encontremos utilidad correspondiente.

Solución

Aquí se nos pide maximizar la función utilidad, para el caso es la misma función de beneficio, es decir: $U(q) = I(q) - C(q)$ donde $I(q) = p.q$.

Entonces, $I(q) = \left(\frac{q^2}{3} - 200q + 600\right).q = \frac{q^3}{3} - 200q^2 + 600q$, luego:

$$\begin{aligned} U(q) &= \tfrac{q^3}{3} - 200q^2 + 600q - \left(\tfrac{5q^3}{3} + 400q^2 - 25\ 000q + 10\ 000\right) \\ U(q) &= \tfrac{q^3}{3} - 200q^2 + 600q - \tfrac{5q^3}{3} - 400q^2 + 25\ 000q - 10\ 000 \\ U(q) &= \tfrac{-4q^3}{3} - 600q^2 + 25\ 600q - 10\ 000 \end{aligned}$$

Para maximizar la función utilidad, primero hallamos su derivada:

$$U'(q) = \cancel{3}\frac{-4q^2}{\cancel{3}} - (2)600q + 25\ 600 = -4q^2 - 1\ 200q + 25\ 600$$

Ahora, encontramos los puntos críticos de esta función:

$-4q^2 - 1\ 200q + 25\ 600 = 0$	Igualamos a cero la derivada
$-4\left(q^2 + 300q - 6\ 400\right) = 0$	Factorizamos -4
$(q+ \qquad)(q- \qquad) = 0$	Buscamos dos números que al multiplicarlos den como resultado 6 400 y al restarlos 300
$(q + 320)(q - 20) = 0$	

Esta función tiene dos puntos criticos; $q = -320$ y $q = 20$, el primero, es decir $q = -320$ no aplica en este caso, ya que q representa las unidades producidas las cuales deben ser valores positivos; ahora, usaremos el criterio de la segunda derivada para verificar en $q = 20$ la función de utilidad alcanza un valor máximo. Hallemos la segunda derivada y evaluemosla en $q = 20$:

$$U''(q) = -8q - 1\ 200$$

$$U''(20) = -8(20) - 1\ 200 = -1\ 360 < 0$$

Como $U''(20) < 0$ podemos concluir que la función $U(q)$ alcanza un valor máximo en $q = 20$ y este valor es $U(20)$.

$$U(20) = \frac{-4(20)^3}{3} - 600(20)^2 + 25\ 600(20) - 10\ 000 \approx 251\ 334$$

La utilidad máxima es 251 334 y se alcanza produciendo 20 unidades.

Situación 6:

La empresa Telmex tiene actualmente 2 000 suscriptores que pagan una cuota mensual de \$85 000. Una encuesta reveló que se tendrían 200 suscriptores más por cada \$5 000 de descuento en la cuota. ¿Bajo qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían entonces?

Solución:

Para poder resolver esta situación, primero tenemos que plantear la función de ingreso, para lo cual debemos analizar antes como se comporta el número de suscriptores en comparación con la cuota mensual, veamos:

Cuota mensual	N^o de suscriptores	Ingreso
85000	2000	170000000
80000	2200	176000000
75000	2400	180000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$85000 - 5000x$	$2000 + 200x$	$(85000 - 500x) * (2000 + 200x)$

Si x el número de disminuciones de \$5 000, entonces, la cuota mensual es de $85000 - 5000x$, por lo que es necesario que $0 \leq x \leq 17$ (la cuota no puede ser negativa) y el número de nuevos suscriptores es $200x$. Así, el número total de suscriptores es $2000 + 200x$. Queremos maximizar el ingreso I que está dado por:

$$I = (\text{número de suscriptores})(\text{cuota por suscriptor})$$

Como se indica en la tabla, $I(x) = (85000 - 5000x) * (2000 + 200x)$ efectuando las respectivas multiplicaciones se tiene:

$$I(x) = 170000000 + 17000000x - 10000000x - 1000000x^2$$

$$I(x) = 170000000 + 7000000x - 1000000x^2$$

Después de tener esta función ingreso, ahora analizaremos su comportamiento usando la derivada.

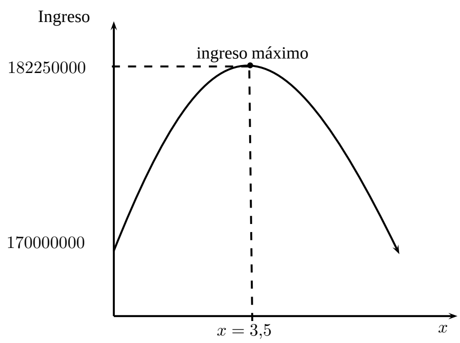
$$I'(x) = 7000000 - 2000000x$$

Igualando la derida a cero se tiene $7000000 - 2000000x = 0$; lo cual indica que $x = \frac{7000000}{2000000} = 3{,}5$ es un punto crítico para la función de ingreso.

Veamos el diagrama de signos para $7000000 - 2000000x$:

	3,5		
+ + + + +	|	- - - - - -	$7000000 - 2000000x$

Según esto, la función de ingreso es creciente en el intervalo $(0, 3{,}5)$ y es decreciente en el intervalo $(3{,}5, 17)$, luego en $x = 3{,}5$ la función toma un valor máximo que es: $I(3{,}5) = 170000000 + 7000000(3{,}5) - 1000000(3{,}5)^2 = 182250000$, estos resultados los podemos observar mejor en la siguiente gráfica.



El ingreso máximo ocurre en $x = 3{,}5$, que corresponde a 3,5 disminuciones de \$5 000 para una disminución total de \$17 500; por ello, la cuota mensual es de \$ 85 000-\$17 5000=\$67 500 y el número de suscriptores bajo esa cuota es $2\,000 + 200(3{,}5) = 2\,700$. Luego el ingreso máximo es de $67\,500 \cdot 2\,700 = 182\,250\,000$.

Situación 7:

Una empresa de bienes raices posee 100 apartamentos. Cada apartamento puede arrendarse en promedio a \$630 000 mensuales. Sin embargo, por cada \$20 000 de incremento, habrá dos apartamentos vacíos. ¿Qué valor de arriendo mensual maximizará el ingreso y cuántos apartamentos vacios habrá?

Solución

De igual manera que en la situación anterior, primero analizamos el comportamiento del ingreso de esta compañía de bienes raíces, para luego poder modelar y analizar la función de ingreso.

Valor del arriendo mensual	Nº de apartamentos rentados	Ingreso mensual $(p.q)$
630 000	100	63 000 000
650 000	98	63 700 000
670 000	96	64 320 000
690 000	94	64 860 000
710 000	92	65 320 000
730 000	90	65 700 000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$630\,000 + 20\,000x$	$100 - 2x$	$(630\,000 + 20\,000x)(100 - 2x)$

Si x es el número de aumentos de \$20 000 en el valor del arriendo mensual, entonces la cuota es de $630\ 000 + 20\ 000x$, y el número de apartamentos rentados es $100 - 2x$. Por ejemplo, si $x = 5$ significa que el valor mensual se incrementa en \$ 100 000 luego queda en \$ 730 000; ahora como por cada incremento de \$ 20 000 quedan 2 apartamentos sin arrendar, en este caso quedarían 10, es decir, se arriendan 90 apartamentos (como se indica en la tabla anterior), con lo cual el ingreso mensual para esta compañía será de \$ 730 000*90=\$65 700 000.

Deseamos maximizar el ingreso I que está dado por:

I= (valor del arriendo mensual) (n^{o} de apartamentos rentados)

Como se indica en la tabla, $I(x) = (630\ 000 + 20\ 000x) * (100 - 2x)$ efectuando las respectivas multiplicaciones se tiene:

$$I(x) = 63\ 000\ 000 - 1\ 260\ 000x + 2\ 000\ 000x - 40\ 000x^2$$

$$I(x) = 63\ 000\ 000 + 740\ 000x - 40\ 000x^2$$

Después de tener esta función ingreso, ahora analizaremos su comportamiento usando la derivada.

$$I'(x) = 740\ 000 - 80\ 000x$$

Igualando la derivada a cero se tiene $740\ 000 - 80\ 000x = 0$; lo cual indica que $x = \frac{740\ 000}{80\ 000} = 9{,}25 \approx 9$ es un punto crítico para la función de ingreso.

Veamos el diagrama de signos para $740\ 000x - 80\ 000x$

9,25

+ + + + + | - - - - - - $740\ 000x - 80\ 000x$

De acuerdo a lo anterior podemos decir que la función $I(x)$ es creciente en el intervalo $[0, 9{,}25)$ y decreciente en $(9{,}25, \infty)$. También podemos afirmar que en $x = 9{,}25$ la función alcanza un máximo relativo (que a su vez es máximo absoluto). Este valor máximo es $I(9{,}25) = 815\ 000 * 81,5 = 66\ 422\ 500$.

Sin embargo, observemos que si $x = 9{,}25$ el número de apartamentos que se arriendan es $100-2*9{,}25 = 81{,}5$, pero no tiene sentido hablar de 81,5 apartamentos, por esta razón el valor de x que maximiza la función ingreso es $x = 9$, el valor mensual del arriendo que maximiza esta función es $630\ 000+20\ 000(9) = 810\ 000$ y el número de apartamentos rentados es $100 - 2 * 9 = 82$, luego el ingreso máximo es de $810\ 000 * 82 = 66\ 420\ 000$.

La Elasticidad de la demanda

Los bienes de demánda elástica son aquellos que cuando presentan variación en su precio generan así mismo variación en la cantidad demandada, es decir, son sensibles al precio. Los bienes que, por el contrario, son poco sensibles a cambios en su precio son los de demanda inelástica o rígida, en éstos pueden producirse grandes variaciones en los precios sin que los consumidores varíen las cantidades que demandan. El caso intermedio se llama de elasticidad unitaria.

Si $q = f(p)$ es la función de demanda para un producto y esta función es diferenciable, entonces la elasticidad (en (q, p)), denotada con la letra griega η, para este producto está dada por:

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{df}{dp} = \frac{p}{q}f'(p)$$

De este modo si:

1. $|\eta| < 1$, la demanda es inelástica.
2. $|\eta| > 1$, la demanda es elástica.
3. $|\eta| = 1$, la demanda tiene elasticidad unitaria.

Situación 8:

Si la función de demanda es $f(p) = 20\ 000 - 2p$, calculemos entonces la elasticidad de la demanda para un nivel de producción de $q = 40$.

Solución

$$\eta = \frac{p}{q}f'(p) = \frac{p}{q}(-2) = \frac{-2p}{q}$$

Ahora, necesitamos calcular la elasticidad para $q = 40$, en este caso expresamos la función de demanda en función de q, es decir, si $q = f(p) = 20\ 000 - 2p$ y $q - 20\ 000 = -2p$ entonces, $\frac{q-20\ 000}{-2} = p$; luego $p = \frac{-q}{2} + 10\ 000$, lo que significa que para este nivel de producción $p = \frac{-40}{2} + 10\ 000 = 9\ 980$.

Ahora sí podemos evaluar la elasticidad para la pareja $(9980, 40)$:
$\eta = \frac{-2(9\ 980)}{40} = 499$. Observemos que $|\eta| = |499| = 499 > 1$, con lo que podemos decir que la demanda es elástica, lo que significa que para un nivel de producción de 40 unidades, un pequeño aumento en el precio causa una disminución bastante significativa en la cantidad demandada.

Situación 9:

Si la cantidad demandada de cierto bien se comporta como $q = f(p) = 5\ 000p^{-2}$ hallemos la elasticidad de $f(p)$ y el porcentaje exacto de variación de la cantidad demandada cuando el precio aumenta un 1 % a partir de $p = 50$.

Solución

En este caso $\frac{df}{dp} = 5\ 000(-2)p^{-1} = -10\ 000p^{-1} = \frac{-10\ 000}{p}$ luego,

$$\eta = \frac{p}{5\ 000p^{-2}} \frac{-10\ 000}{p} = \frac{-2\cancel{p}p^2}{\cancel{p}} = -2p^2.$$

Ahora evaluamos η en $p = 100$ y obtenemos $\eta = -2(100^2) = -20\ 000$. Luego $|\eta| = 20\ 000$ que significa que la demanda es elástica. Equivale a decir que un aumento del precio en un 1 % genera una disminución en la cantidad demandada.

En este caso particular, podemos calcular exactamente la disminución de la demanda. Cuando el precio es 50, la cantidad demandada es $q = 5\ 000(50)^{-2} = \frac{5\ 000}{(50)^2} = \frac{5\ 000}{2\ 500} = 2$.

Ahora, si el precio $p = 50$ aumenta un 1 %, el nuevo precio será $50 + \frac{50}{100} = 50{,}5$ luego la variación de la demanda será:

$$f(50{,}5) - f(50) = 5\ 000(50{,}5)^{-2} - 5\ 000(50)^{-2} = \frac{5\ 000}{(50{,}5)^2} - \frac{5\ 000}{(50)^2} \approx -0{,}04.$$

La variación porcentual de la demanda a partir de $f(50) = 2$ es aproximadamente

$$-\left(\frac{0{,}04}{2}\right) * 100 = -2.$$

Situación 10:

Si la función de demanda para un bien es $f(p) = 150 - 2p$, hallemos la elasticidad de la demanda para un precio de $p = 25$.

Solución

$\frac{df}{dp} = -2$

Sustituimos:

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{df}{dp} = \frac{p}{150 - 2p}(-2) = \frac{-2p}{150 - 2p}$$

Vemos cómo la elasticidad es distinta dependiendo del precio, si el precio es $p = 25$, simplemente lo sustituimos y obtenemos que:

$$\eta = \frac{-2(25)}{150 - 2(25)} = -0{,}5$$

Interpretación

Si el precio aumenta el 1 %, la cantidad demandada disminuye el 0,5 %. Se trata de un bien normal (elasticidad negativa) y la demanda es inelástica ($|\eta| < 1$), en el resultado de este caso se evidencia que una variación de 1 % en el precio genera una variación menor en la cantidad demandada.

5.3. Actividades de práctica

1. Derive cada una de las siguientes expresiones.

   a) $f(x) = -5\sqrt{x} + \frac{7}{\sqrt{x}}$

   b) $f(x) = x^3(2x+1)^4$

   c) $f(x) = \frac{(-9x+8)^6}{4x^{\frac{1}{4}}}$

   d) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x}{3x^2-5}}$

   e) $f(x) = 5x\sqrt[3]{6x^2+7x}$

   f) $f(x) = \frac{1}{x}$

   g) $f(x) = \frac{3x}{(7x^4-3)^2}$

   h) $f(x) = 2x^2e^{(4x+1)}$

   i) $f(x) = \frac{1}{(3-5x^2)^3}$

   j) $f(x) = \frac{(3x^{\frac{1}{5}}+2)}{\sqrt{x}}$

   k) $f(x) = (\ln 2)7x$

   l) $f(x) = -\frac{6x^5+3x}{4}$

2. Para el producto de un monopolista la función de demanda es $p = 72 - 0{,}04q$ y la función de costo es $c = 500 + 30q$.

   a) ¿A qué nivel de producción se maximiza la utilidad? ____________________

   b) ¿Cuál es el precio para obtener una utilidad máxima? ____________________

   c) ¿Cuál es la utilidad máxima? ____________________

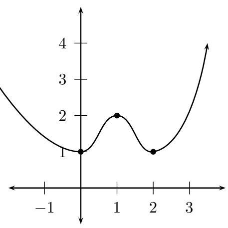
3. El ingreso I obtenido por vender x unidades está dado por $I(x) = 60x - 0{,}01x^2$. Determine el número de unidades que deben venderse al mes, de

modo que se maximice el ingreso. ¿Cuál es el ingreso máximo? ________
____

4. Para cada una de las siguientes funciones, encuentre los puntos críticos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, finalmente trace la gráfica.

   a) $f(x) = 9x - \frac{x^3}{3}$
   b) $f(x) = x^2 e^x$

5. Observe la gráfica y complete los enunciados.



   a) $f'(x) > 0$ en el intervalo ____.
   b) $f'(x) < 0$ en el intervalo ____.
   c) $f'(x) = 0$ en ____________.
   d) En $x =$ ____, $f(x)$ alcanza un máximo local.
   e) En $x =$ ____, $f(x)$ alcanza un mínimo local.
   f) $f(x)$ es creciente en ________.
   g) $f(x)$ es decreciente en ______.
   h) El valor máximo de $f(x)$ es _.

6. Use las derivadas para analizar el comportamiento de las siguientes funciones (trace la gráfica)

   a) $f(x) = (3 - x)\sqrt{x}$
   b) $f(x) = 3x - x^3$
   c) $f(x) = x^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}$
   d) $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$
   e) $f(x) = \frac{5x+2}{x^2+1}$
   f) $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$
   g) $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$

7. Realice el bosquejo de una función continua $f(x)$, tal que $f(1) = 2$, $f(3) = 1$, $f'(1) = f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x < 1$, $f'(x) < 0$ para $1 < x < 3$, $f(x)$ tiene un mínimo relativo cuando $x = 3$.

8. Un fabricante ha determinado que para cierto producto, el costo promedio $\overline{c}$ por unidad está dado por $\overline{c} = 2q^2 - 36q + 210 - \frac{200}{q}$.¿Cuál debe ser el nivel de producción para minimizar el costo total?, ¿cuál es el costo total mínimo? ______________________________
____

9. La demanda Q de la mantequilla, está relacionada con el precio P mediante la ecuación $Q\sqrt{P} = 38$.

a) Use la derivada implícita para hallar $\frac{dQ}{dP}$.

b) Halle el valor de $\frac{dQ}{dP}$ cuando $P = \$400$.

10. La ecuación de la demanda de un cierto bien es $p = 60 - 0,6q$. Si la función de costo es $C(q) = qe^q + 30$ determine:

    a) Las funciones de costo marginal, ingreso marginal y beneficio marginal.

    b) Las funciones de costo medio, ingreso medio y beneficio medio.

11. La función de costo para cierto bien está dada por:

$$C(q) = \begin{cases} 80 + 10q & 0 \leq q < 30 \\ -220 + 20q & 30 \leq q < 200 \end{cases}$$

    Si la ecuación de la función de demanda es $p = 200 - q$, para $0 \leq q \leq 200$, determine:

    a) El costo mínimo y el costo máximo.

    b) El ingreso máximo.

    c) El beneficio mínimo y beneficio máximo.

12. Suponga que la cantidad demandada de cierto bien está dada por $D(p) = 8000p^{-1,5}$, halle la elasticidad de la demanda cuando $p = 4$.

13. Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 400 - 2q$ y que la función de costo promedio es $\overline{c} = 0{,}2q^2 + 4q + \frac{400}{q}$, determine:

    a) El nivel de producción en el que se maximiza la utilidad.

    b) El precio en el cual la utilidad es máxima.

    c) La utilidad máxima.

14. El costo total (en cientos de dólares) en producir x artículos por semana es $C(x) = 6 + \sqrt{4x + 4}$ para $0 \leq x \leq 30$. Encuentre el costo marginal de producir 10 artículos.

15. Si se invierten \$ 2 000 000 en una cuenta que paga una tasa de interés de 1,2 %, compuesto mensualmente el monto en la cuenta después de t años está dado por

$$M(t) = 2000000(1{,}012)^{12t}$$

    a) Determine el monto en la cuenta después de 2 años.

b) Calcule la razón de cambio del dinero al cabo de 2 años.

16. La cotización de las sesiones de una determinada sociedad, suponiendo que la bolsa funciona los 30 días completos de un mes de 30 días, tiene el siguiente comportamiento: $C(x) = 0{,}01x^3 + 0{,}45x^2 + 2{,}43x + 300$ Donde x representa los días.

    a) Trace la gráfica del comportamiento de las cotizaciones.

    b) Determine la cotización máxima y mínima, así como los días en que ocurrieron, en días diferentes al primero y al último.

    c) Determine los periodos de tiempo en los que las acciones subieron o bajaron.

17. En una empresa de la industria del calzado se ha determinado que la función de demanda es $p = 100 - 0,01q$, siendo q la producción semanal de un cierto tipo de calzado en pares de zapatos. Supongamos que el precio se mide en centavos, y el costo total está dado por la relación $C(q) = 59q + 30000$. Encuentre:

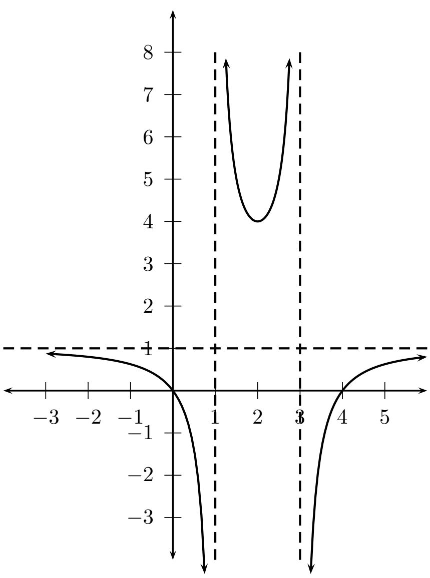
    a) Ingreso total y marginal.

    b) Costo marginal.

    c) El beneficio total semanal.

    d) Interprete los resultados.

18. Observe la siguiente función y conteste:



a) $f'(x) > 0$ en los intervalos ___.

b) $f'(x) < 0$ en los intervalos ___.

c) $f'(x) = 0$ en __________.

d) $f(x)$ es creciente en ______.

e) $f(x)$ es decreciente en ____.

f) La función es cóncava en ___.

g) La función es convexa en ___.

h) Una asíntota horizontal para la función es:

________________.

i) Una asíntota vertical para la función es:

________________.

19. La temperatura corporal (^oF) de un paciente después de t horas de haber tomado una aspirina está dada por $T(t) = 98 + 8e^{-0,5t}$.

    a) Halle la temperatura del paciente después de 5 hrs.

    b) ¿Cuál es la razón de cambio en la temperatura después de 53 hrs? ____________________

20. Un fabricante determina que m empleados producirán un total de q unidades de un producto por día, donde:

$$q = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}}.$$

Si la ecuación de demanda para el producto es $p = \frac{900}{q+9}$; determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 9$.

21. La demanda mensual de almuerzos en el restaurante de la universidad está dado por las siguientes funciones:

$Q(p) = 60 - 0,01p$ demanda mensual de un estudiante.
$Q(p) = 29 - 0{,}002p$ demanda mensual de un profesor.

Donde p representa el precio de un almuerzo.

   a) ¿Cuál debe ser el precio mensual de modo que la demanda de los profesores sea igual a la demanda de los estudiantes? ____________________

   b) Calcule la elasticidad de cada una de las demandas.

   c) ¿Cual de las dos demandas es más elástica? ____________________

   d) Interprete el resultado del item anterior. ____________________

   e) Una variación de \$500 en el precio, ¿en cuál demanda influye más?, ¿con qué se relaciona este resultado? ____________________

Capítulo 6

Integración

6.1. Antiderivadas e integrales

En el capítulo anterior analizamos el concepto de derivada y sus aplicaciones; dada una función buscábamos la función que modelaba la variación de esta respecto a la variable independiente. En este captíulo realizaremos el proceso inverso, dada la función que modela la variación de una función, buscaremos qué función satisface que esa es su derivada. En otras palabras, si tenemos la función de costos totales marginales de una empresa estaremos interesados en determinar o encontrar la función de costos totales.

Una antiderivada $F(x)$ de una función $f(x)$ es aquella función tal que $F'(x) = f(x)$ en todo el dominio de $F(x)$.

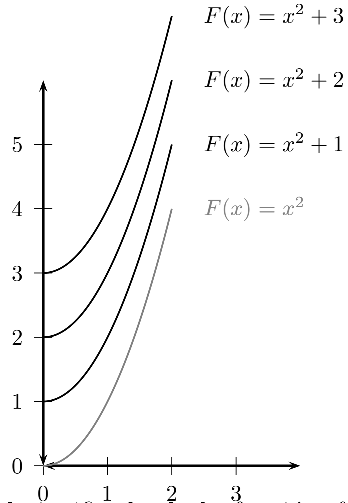
Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = 2x$, y averiguemos una antiderivada de $f(x)$.

Lo primero que debemos tener claro es que $f(x)$ deber ser la derivada de cierta función para poder encontrar la antiderivada. Si consideramos la función $F(x) = x^2$, esta satisface que su derivada es $F'(x) = 2x$, es decir, que $F'(x) = f(x) = 2x$; por ello, una antiderivada de $f(x)$ es $F(x) = x^2$. Sin embargo, cabe resaltar que $F(x) = x^2$ no es la única antiderivada de $f(x)$ porque para la función $G(x) = x^2 + 3$ por ejemplo, su derivada es $G'(x) = f(x) = 2x$, entonces no existe una sola antiderivada. En realidad hay infinitas antiderivadas para una función derivable. ■

Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces toda antiderivada de $f(x)$ es de la forma $G(x) = F(x) + C$ donde C es una constante real (un número real).

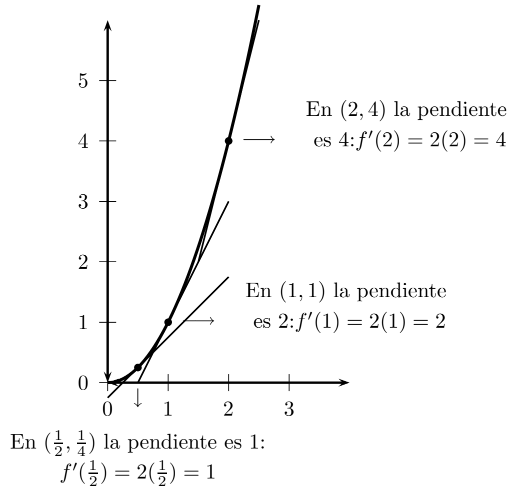
Para analizar un poco más el concepto de antiderivada veamos la representación gráfica de algunas antiderivadas de $f(x) = 2x$.



Es importante resaltar el significado de la función $f(x)$ como derivada para lograr interpretar lo que representa para la función antiderivada $F(x)$. Debido a que en nuestro ejemplo $f(x) = F'(x) = 2x$ y la representación gráfica de ella es una línea recta con pendiente 2, por ello, buscamos una función que cumpla que por cada unidad que se varíe en x, y o $f(x)$ se duplica en dicha cantidad. A saber:

$$
\begin{aligned}
2x = \frac{2}{1} \cdot x &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x \\
&= \frac{\text{variación en y}}{\text{variación en x}} \cdot x
\end{aligned}
$$

Lo anterior significa que por cada unidad que variemos en x, y duplica dicha unidad. Adicionalmente, debemos resaltar que por cada valor que le demos a x en la función derivada, dicho valor representa la pendiente de la recta tangente en el punto, como se observa en la siguiente figura.



Ahora que hemos analizado el concepto de antiderivada observemos el siguiente ejercicio.

Ejemplo

Encontremos la antiderivada general de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^{-1}$

   Si recordamos las propiedades de los exponentes tenemos que $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ y la función que satisface que su derivada es $F(x) = ln(x) + C$.

b. $f(x) = 3x^2$

   En este caso $F(x) = x^3 + C$ ya que al derivarla se obtiene $f(x)$.

c. $f(x) = e^x$

   Como sabemos $F(x) = e^x + C$ es la única función que satisface que su derivada es $f'(x) = e^x$.

d. $f(x) = 3(3x^2 + 2x)^2(6x + 2)$

   Para determinar la antiderivada de esta función se sugiere recordar la regla de la cadena, observemos que $(6x+2)$ es justamente la derivada de $3x^2+2x$; como consecuencia $F(x) = (3x^2 + 2x)^3$.

e. $f(x) = (2ln3) \cdot 3^{2x}$

Como se observa la función $f(x)$ contiene una función de tipo exponencial a la que analizaremos su derivada para identificar si ésta aparece completa en $f(x)$. Si esto ocurre podremos utilizar la regla de la cadena y como consecuencia la antiderivada deberá ser la función exponencial $F(x) = 3^{2x} + C$:

$F'(x) = 3^{2x} \cdot 2 \cdot ln(3) = (2ln3) \cdot 3^{2x}$.

f. $f(x) = \frac{4x-2}{2x^2-2x}$

Al igual que en el ejercicio anterior trataremos de identificar en $f(x)$ si alguna de las expresiones es justamente la derivada de la otra.

Si consideramos a $4x - 2$, su derivada es 4, pero si tomamos a $2x^2 - 2x$ encontramos que su derivada es $4x - 2$; por lo tanto estamos en el caso de un logaritmo natural ya que su derivada es el cociente de 1 entre la función, multiplicado con la derivada de la función: $F(x) = ln(2x - 2x)$, veamos:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2x^2 - 2x} \cdot (4x - 2) \\ &= \frac{1}{2x^2 - 2x} \cdot \frac{(4x - 2)}{1} \\ &= \frac{4x - 2}{2x^2 - 2x} \end{aligned}$$

■

Como se observa en los ejemplos, para poder determinar la antiderivada de cualquier función debemos derivar correctamente e identificar el tipo de función que podrá ser basados en los elementos de la derivada.

A continuación, se expondrá una tabla con algunas de las antiderivadas más utilizadas.

Derivada	**Antiderivada general**
k con $k \in \mathbb{R}$	$kx + C$
x^n con $n \in \mathbb{Q}$; $n \neq 1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$lnx + C$
e^x	$e^x + C$
a^x con $a \in \mathbb{R}$; $a \neq 1$, $a > 0$	$\frac{a^x}{lna} + C$

Ahora que reconocemos el concepto de antiderivada introduciremos el de integral.

A la antiderivada general de una función $f(x)$ se le conoce con el nombre de integral indefinida y se denota de la siguiente manera:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

El símbolo $\int$ se lee integral, a $f(x)$ se le conoce como el integrando y dx indica respecto a qué variable se está integrando. De otra parte, cuando nos solicitan hallar una integral nos estan indicando que debemos encontrar la antiderivada de $f(x)$.

Ejemplo

Hallemos las siguientes integrales.

a. $\int x^2 dx$

Para este ejercicio necesitamos encontrar la función $F(x)$ tal que $F'(x) = x^2$. Como $f(x)$ es una función polinómica sabemos que la antiderivada deberá ser de un grado mayor que el de ella porque siempre que derivamos funciones polinómicas le quitamos una unidad al exponente, por ende $F(x)$ es una función polinómica de grado 3. El inconveniente es que para que $F(x)$ fuese x^3 en su derivada deberá aparecer $3x^2$; dado que esto no ocurre significa que el 3 se canceló a través de una división, veamos:

Si $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$, entonces $F'(x) = 3\dfrac{x^2}{3} = \cancel{3}\dfrac{x^2}{\cancel{3}} = x^2$. Por lo tanto:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

En una función polinómica siempre que no aparezca el número que se baja del exponente de la función original, es porque él estaba dividiendo al polinomio, de tal manera que al bajarlo a multiplicar se cancela con el denominador.

b. $\int x^{-1}dx$

Como el exponente del monomio es -1, entonces la integral es logaritmo natural de x, ya que al derivarla se obtiene $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

$$\int x^{-1}dx = lnx + C$$

c. $\int 2^x dx$

Como $f(x) = 2^x$ es una función exponencial de la cual su antiderivada es ella misma pero multiplicada por $ln2$, que es una constante y no aparece en la integral, entonces debía estar dividiendo a la función exponencial.

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{ln2} + C$$

■

La integral posee algunas propiedades que en ocasiones facilitan el proceso para determinarlas. Veámoslas.

6.2. Propiedades básicas de la integral

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones con antiderivadas $F(x)$ y $G(x)$ respectivamente y a, b y c constantes reales:

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C$

   Ejemplo

   Hallemos las siguientes integrales.

   a. $\int 3x^4dx$

   b. $\int \sqrt{5}x^8dx$

   c. $\int \frac{4}{3}x^{\frac{3}{7}}dx$

   d. $\int x^{-\frac{5}{2}}dx$

Como estas integrales corresponden a funciones de la forma x^n con $n \neq -1$ cuya antiderivada es $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, tenemos:

a. $\displaystyle\int 3x^4 dx = 3\int x^4 dx = 3\frac{x^5}{5} + C$

b. $\displaystyle\int \sqrt{5}x^8 dx = \sqrt{5}\int x^8 dx = \sqrt{5}\frac{x^9}{9} + C$

c. $\displaystyle\int \frac{4}{3}x^{\frac{3}{7}} dx = \frac{4}{3}\int x^{\frac{3}{7}} dx = \frac{4}{3}\frac{x^{\frac{10}{7}}}{\frac{10}{7}} + C = \frac{4}{3}\Big(\frac{7}{10}\Big)x^{\frac{10}{7}} + C = \frac{28}{30}x^{\frac{10}{7}} + C =$ $\displaystyle\frac{14}{15}x^{\frac{10}{7}} + C$

d. $\displaystyle\int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{\frac{-3}{2}}}{\frac{-3}{2}} = \frac{-2}{3}x^{\frac{-3}{2}} + C$

■

2. $\displaystyle\int \Big(af(x) \pm bg(x)\Big)dx = \int af(x)dx \pm \int bg(x)dx = aF(x) \pm bG(x) + C$

Ejemplo

Calculemos las siguientes integrales.

a. $\displaystyle\int e^x + 10x - 3\ dx$

b. $\displaystyle\int x^{-1} + 2^x\ dx$

c. $\displaystyle\int x^4 + 7x^3 - 2x + 8\ dx$

d. $\displaystyle\int 5x^{\frac{1}{2}} + 5x + 7\ dx$

Para resolverlas usaremos, en cada caso, las antiderivadas básicas:

a.

$$\begin{aligned}\int e^x + 10x - 3\ dx &= \int e^x + 10x - 3\ dx\\ &= \int e^x\ dx + 10\int x\ dx - 3\int\ 1dx\\ &= e^x + 10\frac{x^2}{2} - 3x + C\\ &= e^x + 5x^2 - 3x + C\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\int x^{-1} + 2^x \ dx &= \int x^{-1} \ dx + \int 2^x \ dx \\ &= lnx + \frac{2^x}{ln2} + C\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}\int x^4 + 7x^3 - 2x + 8 \ dx &= \int x^4 \ dx + 7\int x^3 \ dx - 2\int x \ dx + 8\int 1 \ dx \\ &= \frac{x^5}{5} + 7\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2} + 8x + C \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{4} - x^2 + 8x + C\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}\int 5x^{\frac{1}{2}} + 5x + 7 \ dx &= \int 5x^{\frac{1}{2}} \ dx + \int 5x \ dx + \int 7 \ dx \\ &= 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 5\frac{x^2}{2} + 7x + C \\ &= \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}x^2 + 7x + C\end{aligned}$$

■

Para integrar una función o determinar su antiderivada existen algunos métodos o técnicas de integración conocidas como sustitución, por partes y fracciones parciales, que se derivan de la regla de la cadena, la regla del producto y el cociente de funciones polinómicas respectivamente.

6.3. Métodos de integración

6.3.1. Integración por sustitución

El método de integración por sustitución surge de la regla de la cadena al derivar funciones compuestas. Recordemos.

Si tenemos dos funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 + \sqrt{x}$ y realizamos la composición $(f \circ g)(x)$ obtendremos una función que llamaremos $h(x)$, así

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^3 + \sqrt{x}) = \left(x^3 + \sqrt{x}\right)^2.$$

Cuando derivamos $h(x)$ usamos la regla de la cadena: $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Con esto obtenemos $h'(x) = 2(x^3 + \sqrt{x})(3x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}})$. En estos casos, solemos utilizar una sustitución para abreviar un poco el proceso:

Llamemos u a la función $g(x)$: $u = x^3 + \sqrt{x}$. Luego, sustituyamos $g(x)$ por u en la composición: $h(x) = f(g(x)) = f(u) = u^2$; de este modo, f depende de u quien a su vez depende de x.

Al derivar h respecto a x obtenemos, nuevamente, por la regla de la cadena:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

y, dado que $\dfrac{df}{du} = 2u$ y $\dfrac{du}{dx} = 3x^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tenemos:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = 2u \cdot \left(3x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

en la que al sustituir u por la expresión que representa, se convierte en

$$\frac{dh}{dx} = 2u \cdot \left(3x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2(x^3 + \sqrt{x}) \cdot \left(3x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

De este proceso surge el método o la técnica de sustitución, veamos entonces, el proceso a seguir para integrar una función en la que se observa la composición de funciones.

Ejemplo

Hallemos $\displaystyle\int 2(x^3 + \sqrt{x})\left(3x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Lo principal al resolver esta integral es identificar si se ha utilizado la regla de la cadena, en otras palabras, si alguna de las expresiones es justamente la derivada interna de una función u.

Como $\left(3x^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ es la derivada de $x^3 + \sqrt{x}$ entonces, esta expresión es u y podemos sustituirla para abreviar el proceso de integración.

Sea $u = x^3 + \sqrt{x}$ la derivamos respecto a x

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

de donde despejamos a du con el fin de dejar la integral en términos de una sola varible, en nuestro caso en términos de u:

$$du = \Big(3x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)dx$$

de tal manera que al sustituir en la integral obtenemos

$$\int 2(x^3 + \sqrt{x})\Big(3x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)dx = \int 2u^2 du = 2\frac{u^2}{2} + C$$

en donde reemplazamos a u por la expresión que representa, para obtener el resultado de la integral inicial:

$$\int 2(x^3 + \sqrt{x})\Big(3x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)dx = \cancel{2}\frac{(x^3 + \sqrt{x})^2}{\cancel{2}} + C = (x^3 + \sqrt{x})^2 + C$$

■

Ejemplo

Hallemos las siguientes integrales.

a. $\displaystyle\int \frac{2x + 8}{(x^2 + 8x - 5)}dx$

Lo primero que debemos hacer es identificar a u de tal modo que su derivada se encuentre en la integral.

Opción 1

Si $u = 2x + 8$, entonces

$$\frac{du}{dx} = 2$$

de donde al despejar a du obtenemos

$$du = 2dx$$

Opción 2

Si $u = x^2 + 8x - 5$, entonces

$$\frac{du}{dx} = 2x + 8$$

de donde al despejar a du obtenemos

$$du = (2x + 8)dx$$

De estas opciones podemos identificar que la dos cumplen la condición de que la derivada de u está en la integral, sin embargo, la opción uno no contiene la expresión $x^2 + 8x - 5$ y sobra cuando $u = 2x + 8$.

Por lo anterior, sustituimos la opción dos en la integral y resolvemos el ejercicio.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+8}{(x^2+8x-5)}dx &= \int \frac{(2x+8)dx}{(x^2+8x-5)}\\ &= \int \frac{du}{(u)}\\ &= ln(u)+C\\ &= ln(x^2+8x-5)+C.\end{aligned}$$

b. $\displaystyle\int \frac{14x^6+6x^2+8x}{(2x^7+3x^3+4x^2)^3}dx$

Como estamos comenzando el proceso de identificar la expresión a sustituir, se sugiere considerar las opciones posibles; sin embargo, si se tiene claridad de que el método de sustitución viene de la regla de la cadena, fácilmente identificaremos la expresión a sustituir.

Opción 1

Si $u=(2x^7+3x^3+4x^2)^3$, entonces

$$\frac{du}{dx}=3(2x^7+3x^3+4x^2)(14x^6+9x^2+8x)$$

de donde al despejar a du obtenemos

$$du=3(2x^7+3x^3+4x^2)(14x^6+9x^2+8x)dx$$

Opción 2

Si $u=14x^6+9x^2+8x$, entonces

$$\frac{du}{dx}=28x^5+18x+8$$

de donde al despejar a du obtenemos

$$du=(28x^5+18x+8)dx$$

Opción 3

Si $u=2x^7+3x^3+4x^2$, entonces

$$\frac{du}{dx}=14x^6+9x^2+8x$$

de lo cual obtenemos que

$$du=(14x^6+9x^2+8x)dx$$

Como se observa, la opción que nos sirve es la tres porque u aparece en el denominador y du en el numerador de la expresión racional, sin que sobren ni falten expresiones algebraicas. Con esto sustituimos y hallamos la integral solicitada.

$$\begin{aligned}\int \frac{14x^6+9x^2+8x}{(2x^7+3x^3+4x^2)^3}dx &= \frac{du}{u^3} \\ &= u^{-3}du \\ &= \frac{u^{-2}}{-2}+C \\ &= \frac{-(2x^7+3x^3+4x^2)^{-2}}{2}+C \\ &= -\frac{1}{2(2x^7+3x^3+4x^2)^{-2}}+C\end{aligned}$$

c. $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}+2^x(ln2)}{(e^{2x}+2^x)^2}dx$

Observemos las opciones e identifiquemos la sustitución correcta.

Opción 1

Si $u = 2e^{2x}+2^x(ln2)$, entonces

$$\frac{du}{dx} = 4e^{2x}+2^x(ln2)^2$$

de donde al despejar a du obtenemos

$$du = (4e^{2x}+2^x(ln2)^2)dx$$

Opción 2

Si $u = (e^{2x}+2^x)^2$, entonces

$$\frac{du}{dx} = 2(e^{2x}+2^x)(2e^{2x}+2^x(ln2))$$

de donde al despejar a du obtenemos

$du = 2(e^{2x}+2^x)(2e^{2x}+2^x(ln2))dx$

Opción 3

Si $u = e^{2x}+2^x$, entonces

$$\frac{du}{dx} = 2e^{2x}+2^x(ln2)$$

de lo cual obtenemos que

$du = (2e^{2x}+2^x(ln2))dx$

La sustitución adecuada es la tercera porque cuando reemplazamos obtenemos que tanto u como du se encuentran en la integral dada; observemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{2e^{2x}+2^x(ln2)}{(e^{2x}+2^x)^2}dx &= \int \frac{du}{u^2}\\ &= \int u^{-2}du\\ &= \frac{u^{-1}}{-1}+C\\ &= -u^{-1}+C\\ &= -(e^{2x}+2^x)^{-1}+C\end{aligned}$$

d. $\int \frac{(3ln4)4^{3x}+12x^2}{4^{3x}+4x^3}dx$

Opción 1

Si $u = 4^{3x}+4x^3$, entonces

$$\frac{du}{dx} = (3ln4)(4^{3x})+12x^2$$

de donde al despejar a du obtenemos

$$du = ((3ln4)4^{3x}+12x)dx$$

Opción 2

Si $u = (3ln4)4^{3x}+12x^2$, entonces

$$\frac{du}{dx} = (3ln4)^2(4^{3x})+24x$$

de lo cual obtenemos que

$$du = ((3ln4)^2 4^{3x}+12x^2)dx$$

Así, la sustitución adecuada es la de la primera opción, observemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{(3ln4)4^{3x}+12x^2}{4^{3x}+4x^3}dx &= \int \frac{du}{u}dx\\ &= ln\,|u|+C\\ &= ln\left|4^{3x}+4x^3\right|+C\end{aligned}$$

■

6.3.2. Integración por partes

El método de integración por partes viene dado por la propiedad de la derivada del producto de funciones, observemos.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones con antiderivada tenemos que

$$\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = \frac{[df(x)]}{dx}g(x) + f(x)\frac{[dg(x)]}{dx}.$$

Si integramos a lado y lado de la ecuación

$$\int \frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = \int \frac{[df(x)]}{dx}g(x) + f(x)\frac{[dg(x)]}{dx}$$

y aplicamos la propiedad de la integral de la suma de funciones obtenemos

$$\int \frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = \int \frac{[df(x)]}{dx}g(x) + \int f(x)\frac{[dg(x)]}{dx}$$

de donde

$$[f(x)g(x)] = \int \frac{[df(x)]}{dx}g(x) + \int f(x)\frac{[dg(x)]}{dx}. \tag{6.1}$$

De la igualdad (6.1) podemos despejar una de las integrales de la izquierda; despejemos[1] $\int f(x)\frac{[dg(x)]}{dx}$

$$\int f(x)\frac{[dg(x)]}{dx} = [f(x)g(x)] - \int \frac{[df(x)]}{dx}g(x)$$

Si por otra parte, sustituimos a $f(x)$ por la letra u y a $g(x)$ por la letra v en la igualdad (6.1), para abreviar la expresión, tenemos

$$\int udv = [uv] - \int du(v)$$

que puede ordenarse así

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{6.2}$$

Una integral que se resuelva por partes siempre proviene del producto de dos funciones, por ello, la idea principal es encontrar aquellas funciones u y v que satisfagan la igualdad (6.2)

[1] También pudimos despejar la otra integral.

Las características para que una integral se resuelva por partes son:

- Debemmos observar el producto de dos funciones tales que ninguna sea la derivada de la otra.
- Elegimos una de las funciones como u y consideramos la otra como la derivada de una función v, es decir, como dv.
- Hallamos du y v; para ello, derivamos la función considerada como u e integramos o determinamos la antiderivada de dv.
- Sustituimos a u, v, du y dv en la igualdad (6.2).
- Calculamos la integral ubicada a la izquierda de la igualdad (6.2).
- Si es necesario volver a utilizar el método de integral por partes en la integral de la izquierda debemos hacerlo hasta no tener una integral por calcular.

Ejemplo

Hallemos las siguientes integrales.

a. $\int xe^x dx$

Analicemos las funciones que aparecen en la integral: notemos que xe^x es un producto de funciones y que ninguna es la derivada de la otra; observemos, para e^x la derivada es ella misma y no x, y si consideramos a x la derivada es 1 que no corresponde a e^x.

Una vez analizadas las funciones que aparecen en la integral, vamos a aplicar el método de por partes. Sin embargo, tenemos dos opciones para elegir a u y a dv; veámoslas y elijamos la que resuelve la integral solicitada.

Opción 1

Si $u = e^x$ y $dv = x$, entonces

$$du = e^x dx \quad \text{y} \quad v = \frac{x^2}{2}$$

que al sustituir en la integral obtenemos

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Opción 2

Si $u = x$ y $dv = e^x$, entonces

$$du = 1dx \text{ y } v = e^x$$

que al sustituir en la integral obtenemos

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x dx = e^x(\frac{x^2}{2}) - \int \frac{x^2}{2}e^x dx \quad (6.3)$$	$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x(1)dx \quad (6.4)$$

Como en la opción 1 la integral de la izquierda en la igualdad (6.3) no simplifica el proceso, de hecho lo vuelve más complejo a diferencia de la opción 2 en la cual la integral de la izquierda en la igualdad (6.4) es más sencilla de resolver; entonces la elección correcta de u y dv es la segunda. De este modo:

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x(1)dx\\ &= xe^x - \int e^x dx\\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

b. $\int x^2 lnx dx$

Al igual que en el ejercicio anterior observamos que la integral es el producto de dos funciones tales que ninguna es la derivada de la otra, por ende aplicaremos integración por partes. Analicemos las dos opciones para elegir a u y dv.

Opción 1

Si $u = x^2$ y $dv = lnxdx$, entonces $du = 2xdx$ y $v = xlnx - x$ que al sustituir en la integral obtenemos:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\begin{aligned}\int x^2 lnx dx &= x^2(xlnx - x) - \int (xlnx - x)2xdx\\ &= x^2(xlnx - x) - \int (2x^2 lnx - 2x^2)dx\\ &= x^2(xlnx - x) - \int 2x^2 lnx dx - \int 2x^2 dx\end{aligned}$$

Cabe resaltar que para determinar a v debemos realizar $\int lnxdx$ que requiere aplicar integración por partes, nuevamente:

Sea $u = lnx$ y $dv = dx$ entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = x$, por lo cual

$$\begin{aligned}\int lnxdx &= xlnx - \int \frac{1}{x}xdx \\ &= xlnx - \int \frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}dx \\ &= xlnx - \int 1dx \\ &= xlnx - x + C\end{aligned}$$

Opción 2

Si $u = lnx$ y $dv = x^2dx$, entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \frac{x^3}{3}$ que al sustituir en la integral obtenemos:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\begin{aligned}\int x^2 lnxdx &= lnx\Big(\frac{x^3}{3}\Big) - \int \frac{1}{x}\frac{x^3}{3}dx \\ &= lnx\Big(\frac{x^3}{3}\Big) - \int \frac{x^2}{3}dx\end{aligned}$$

En este caso notamos que la primera opción vuelve más compleja la integral, mientras la segunda facilita el proceso ya que $\int \frac{x^2}{3}dx$ es una integral sencilla de resolver, por ende, la segunda opción es la más adecuada. Resolvamos el ejercicio.

$$\begin{aligned}\int x^2 lnxdx &= lnx\Big(\frac{x^3}{3}\Big) - \int \frac{1}{x}\frac{x^3}{3}dx \\ &= lnx\Big(\frac{x^3}{3}\Big) - \int \frac{x^2}{3}dx \\ &= lnx\Big(\frac{x^3}{3}\Big) - \frac{x^3}{9} + C\end{aligned}$$

■

6.3.3. Integración por fracciones parciales

El método de fracciones parciales se usa cuando tenemos integrales cuyas funciones son racionales, es decir, son divisiones de polinomios. Sin embargo, hay algunas características que nos permitirán identificar cuándo podemos usar fracciones parciales. Observemos.

- El polinomio en el numerador, no debe ser la derivada del polinomio del denominador; porque en ese caso utilizaríamos el método de sustitución.
- El grado del polinomio del numerador debe ser menor al grado del denominador, en caso de ser mayor o igual, dividimos los polinomios con el proceso de división sintética o con el de división normal, de tal modo que sólo aparezcan polinomios y/o fracciones polinomiales donde el grado del numerador sea menor que el del denominador.

Para resolver una integral por fracciones parciales necesitamos recordar las operaciones con fracciones algebráicas; la idea es expresar toda fracción con adiciones o sustracciones de fracciones algebraicas más sencillas. El proceso que conduce a resolver una integral por fracciones parciales se clasifica según el tipo de función racional. Veámoslos.

Caso 1: Funciones racionales cuyo denominador se puede expresar como producto de factores lineales.

Este caso tiene dos opciones de resolverse y dependen de si se repiten o no los factores lineales del denominador. Analicemoslos.

Caso 1.1: Funciones racionales cuyo denominador se puede expresar como producto de factores lineales no repetidos.

Cuando el denominador de la fracción se factoriza y los factores resultan ser lineales y no se repiten, descomponemos la fracción algebraica como la adición de dos o más fracciones según el número de factores en el denominador, de tal modo que los numeradores sean números reales. A continuación expondremos la forma general y daremos algunos ejemplos.

Forma general

$$\frac{p(x)}{(b_0x+a_0)(b_1x+a_1)...(b_nx+a_n)}=\frac{A_0}{b_0x+a_0}+\frac{A_1}{b_1x+a_1}+...+\frac{A_n}{b_nx+a_n}$$

Donde a_0, a_1,..., a_n,b_0, b_1, ... b_n, A_0, A_1, ... y A_n son números reales.

Ejemplo

Expresemos $\dfrac{x+3}{x^2+2x-15}$ como la adición o sustracción de fracciones más sencillas.

Lo primero que debemos hacer es factorizar las expresiones que lo permitan; en nuestro caso $x^2+2x-15$.

$x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$ Buscamos dos números que multiplicados den 15 y restados den 2.

Como el denominador $x^2+2x-15$ se puede representar como un producto de factores lineales[2], vamos a expresar $\dfrac{x+3}{x^2+2x-15}$ de la siguiente forma; que corresponde al caso 1.1.

$$\frac{x+3}{x^2+2x-15}=\frac{A}{x+a_0}+\frac{B}{x+a_1}$$

donde a_0, a_1, A y B son números reales. Según la factorización obtenemos que la expresión buscada es

$$\frac{x+3}{x^2+2x-15}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x-3} \tag{6.5}$$

Veamos.

$$\frac{x+3}{x^2+2x-15}=\frac{x+3}{(x+5)(x-3)}$$ Escribimos la expresión factorizada.

$$\frac{x+3}{(x+5)(x-3)}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x-3}$$ Descomponemos la fracción como en la igualdad (6.5).

$$\frac{x+3}{(x+5)(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x+5)}{(x+5)(x-3)}$$ Operamos.

$$\frac{x+3}{(x+5)(x-3)}=\frac{Ax-3A+Bx+5B}{(x+5)(x-3)}$$ Operamos el numerador.

$$\frac{(x+5)(x-3)(x+3)}{(x+5)(x-3)}=Ax-3A+Bx+5B$$ Pasamos a multiplicar el denominador.

[2]Cuyo grado del exponente es uno.

$$\frac{\cancel{(x+5)(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x+5)(x-3)}} = Ax - 3A + Bx + 5B \qquad \text{Simplificamos.}$$

$$x + 3 = Ax - 3A + Bx + 5B$$

En este punto debemos identificar las características particulares de la igualdad de polinomios: si dos polinomios son iguales es porque componente a componente los polinomios deben ser iguales, esto significa que las expresiones de la derecha con incógnita deben ser idénticas a las expresiones con incógnita de la izquierda, según los exponentes de la misma; y los términos de la derecha sin incógnita deben ser idénticos a los de la izquierda sin incógnita.

$x = Ax + Bx$	Las expresiones con x deben ser iguales.
$3 = -3A + 5B$	Las constantes deben ser iguales.

En el caso de $x = Ax + Bx$ observamos que hay un factor común a la derecha $x = (A + B)x$ como consecuencia los coeficientes de x deben ser iguales: $1 = A + B$. Lo que nos conduce a un sistema de ecuaciones como el siguiente.

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ 3 &= -3A + 5B \end{aligned}$$

Cuya solución es $A = \frac{1}{4}$ y $B = \frac{3}{4}$ que puede obtenerse por cualquiera de los métodos aprendidos: sustitución, igualación, eliminación o regla de Cramer.

Vamos a sustituir los valores de A y B en la expresión (6.5)

$$\frac{x+3}{x^2+2x-15} = \frac{\frac{1}{4}}{x+5} + \frac{\frac{3}{4}}{x-3} \tag{6.6}$$

Conociendo este proceso podemos resolver integrales como $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x-15}dx$ que a primera vista parece complicada, pero al hacer la descomposición o mejor al expresar la fracción polinómica como se observa en la igualdad (6.6) es mucho más sencilla de solucionar:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2+2x-15}dx &= \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x+5} + \frac{\frac{3}{4}}{x-3}\right)dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{4}}{x+5}dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{x-3}dx \\ &= \frac{1}{4}ln|x+5| + \frac{3}{4}ln|x-3| + C \end{aligned}$$

Debe tenerse en cuenta que las integrales $\int \frac{\frac{1}{4}}{x+5}dx$ y $\int \frac{\frac{3}{4}}{x-3}dx$ se realizan aplicando el método de sustitución; en cada caso $u = x+5$ y $u = x-3$ de tal modo que al reemplazarlas en las integrales se obtienen los resultados dados.

■

Ejemplo

Resolvamos las siguientes integrales.

a. $\int \frac{2}{x^2-4x}dx$

Al igual que en el ejemplo anterior vamos a factorizar donde sea posible, en este caso en el denominador: $x^2 - 4x = x(x-4)$

Como los factores del denominador son lineales y no se repiten aplicaremos el caso 1.1.

Expresaremos $\frac{2}{x^2-4x}$ de la forma $\frac{2}{x^2-4x} = \frac{A}{x+a_0} + \frac{B}{x+a_1}$ con a_0, a_1, A y B números reales.

Según la factorización, la anterior expresión se transforma en

$$\frac{2}{x^2-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} \tag{6.7}$$

$\frac{2}{x^2-4x} = \frac{2}{x(x-4)}$	Escribimos la expresión factorizada.
$\frac{2}{x(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4}$	Descomponemos la fracción como en la igualdad 6.7
$\frac{2}{x(x-4)} = \frac{A(x-4)+Bx}{x(x-4)}$	Operamos.
$\frac{x(x-4)2}{x(x-4)} = A(x-4)+Bx$	Pasamos a multiplicar el denominador.
$\frac{\cancel{x(x-4)}2}{\cancel{x(x-4)}} = Ax - 4A + Bx$	Simplificamos.

$$2 = Ax - 4A + Bx \tag{6.8}$$

Igualamos los términos correspondientes de cada polinomio en la igualdad (6.8).

$$\begin{aligned} 0x &= Ax + Bx \\ 2 &= -4A \end{aligned} \tag{6.9}$$

Debemos tener en cuenta que escribimos $0x$ en la ecuación (6.9) porque a la derecha de la ecuación (6.8) no aparece ningún término con x, entonces el coeficiente de x debe ser cero para que la anule.

Al factorizar x en la ecuación (6.9) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 2 &= -4A \end{aligned} \tag{6.10}$$

cuya solución es $A = -\frac{1}{2}$ y $B = \frac{1}{2}$.

De este modo concluimos que $\dfrac{2}{x^2-4x} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{x} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-4}$ y por ende

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2-4x}dx &= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-4}\right)dx \\ &= \int \frac{-\frac{1}{2}}{x}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-4}dx \\ &= -\frac{1}{2}ln|x| + \frac{1}{2}ln|x-4| + C \end{aligned}$$

b. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-4}dx$

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$	Factorizamos.
$\dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{3x}{(x+2)(x-2)}$	Reescribimos la expresión factorizada.
$\dfrac{3x}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2}$	Usamos el caso 1.1.
$\dfrac{3x}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}$	Operamos.

$$\frac{(x+2)(x-2)3x}{(x+2)(x-2)} = A(x-2) + B(x+2) \qquad \text{Pasamos a multiplicar.}$$

$$\frac{\cancel{(x+2)(x-2)}3x}{\cancel{(x+2)(x-2)}} = A(x-2) + B(x+2) \qquad \text{Simplificamos y operamos.}$$

$$3x = Ax - 2A + Bx + 2B \tag{6.11}$$

Igualamos los términos correspondientes:

$$3x = Ax + Bx \tag{6.12}$$

$$0 = -2A + 2B \tag{6.13}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones que resulta de igualar los coeficientes en la ecuación (6.12), teniendo en cuenta que igualamos a cero en la ecuación(6.13) porque en (6.11) no aparece un término constante a la derecha de la igualdad.

$$3 = A + B$$
$$0 = -2A + 2B$$

La solución de este sistema es: $A = \dfrac{3}{2}$ y $B = \dfrac{3}{2}$.

Por lo cual la integral se transforma y resuelve así

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x}{x^2-4}dx &= \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{x+2} + \frac{\frac{3}{2}}{x-2}\right)dx \\
&= \int \frac{\frac{3}{2}}{x+2}dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{x-2}dx \\
&= \frac{3}{2}ln|x+2| + \frac{3}{2}ln|x-2| + C
\end{aligned}$$

■

Caso 1.2: Funciones racionales cuyo denominador se puede expresar como producto de factores lineales repetidos.

El proceso a seguir en este caso es muy similar al caso 1.1, la diferencia radica en los factores lineales repetidos. Lo que buscamos es expresar una fracción de la forma

$$\frac{p(x)}{(b_0x+a_0)^{m_0}(b_1x+a_1)^{m_1}...(b_nx+a_n)^{m_n}}$$

en una como la siguiente

$$\frac{A_0}{(b_0x+a_0)}+\frac{A_0}{(b_0x+a_0)^2}+...+\frac{A_0}{(b_0x+a_0)^{m_0}}+\frac{A_1}{(b_1x+a_1)}+\frac{A_1}{(b_1x+a_1)^2}+...$$

$$+\frac{A_1}{(b_1x+a_1)^{m_1}}+...+\frac{A_n}{(b_nx+a_n)}+\frac{A_n}{(b_nx+a_n)^2}+...+\frac{A_n}{(b_nx+a_n)^{m_n}} \quad (6.14)$$

Como vemos los factores lineales aparecen elevados a un exponente que se distribuye según la expresión (6.14), donde a_0, a_1,..., a_n,b_0, b_1, ... b_n, A_0, A_1, ... y A_n son números reales y m_0, m_1,..., m_n son números naturales.

Ejemplo

Resolvamos las siguientes integrales.

a. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^3+3x^2+3x+1}dx$

$x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$ Factorizamos.

Buscamos expresar a $\dfrac{3x-2}{(x+1)^3}$ en algo de la forma

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3} \quad (6.15)$$

basados en la factorización.

$$\frac{3x-2}{x^3+3x^2+3x+1}=\frac{3x-2}{(x+1)^3}$$ Reescribimos la expresión factorizada.

$$\frac{3x-2}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$ Usamos el caso 1.2.

$$\frac{3x-2}{(x+1)^3}=\frac{A(x+1)^2+B(x+1)+C}{(x+1)^3}$$ Operamos.

$$\frac{(x+1)^3(3x-2)}{(x+1)^3}=A(x+1)^2+B(x+1)+C$$ Pasamos a multiplicar.

$$\frac{\cancel{(x+1)^3}(3x-2)}{\cancel{(x+1)^3}} = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$$ Simplificamos.

Operamos.

$$3x - 2 = Ax^2 + 2Ax + A + Bx + B + C \qquad (6.16)$$

Igualamos los términos correspondientes a lado y lado de la igualdad (6.16)

$$\begin{aligned} 0x^2 &= Ax^2 \qquad (6.17)\\ 3x &= 2Ax + Bx \\ -2 &= A + B + C \end{aligned}$$

De nuevo igualamos a $0x^2$ en la ecuación (6.17) porque a la derecha de (6.16) no aparece un término cuya incógnita sea x^2. Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= A \\ 3 &= 2A + B \\ -2 &= A + B + C \end{aligned}$$

de donde $A = 0$, $B = 3$ y $C = -5$.

Reemplazamos estos valores en (6.15)

$$\frac{3x-2}{x^3+3x^2+x+1} = \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{-5}{(x+1)^3}$$

e integramos

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-2}{x^3+3x^2+x+1}dx &= \int \frac{0}{x+1}dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}dx + \int \frac{-5}{(x+1)^3}dx \\ &= 3\int (x+1)^{-2}dx - 5\int (x+1)^{-3}dx \\ &= 3\frac{(x+1)^{-1}}{-1} - 5\frac{(x+1)^{-2}}{-2} + C \\ &= -3\frac{1}{x+1} + \frac{5}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + C \end{aligned}$$

b. $\displaystyle\int \frac{x}{(2x-1)(x+1)^2}$

Expresamos $\dfrac{x}{(2x-1)(x+1)^2}$ como la adición de fracciones usando el caso 1.2, así

$$\frac{x}{(2x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \tag{6.18}$$

operamos

$$\frac{x}{(2x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(2x-1)(x+1) + C(2x-1)}{(2x-1)(x+1)^2}$$

pasamos a multiplicar

$$\frac{(2x-1)(x+1)^2(x)}{(2x-1)(x+1)^2} = A(x+1)^2 + B(2x-1)(x+1) + C(2x-1)$$

simplificamos y operamos

$$\frac{\cancel{(2x-1)(x+1)^2}x}{\cancel{(2x-1)(x+1)^2}} = Ax^2 + 2Ax + A + 2Bx^2 + 2Bx - Bx - B + 2Cx - 2C$$

$$x = Ax^2 + 2Ax + A + 2Bx^2 + 2Bx - Bx - B + 2Cx - 2C \tag{6.19}$$

igualamos los términos correspondientes de los polinomios en (6.19)

$$0x^2 = Ax^2 + 2Bx^2 \tag{6.20}$$
$$x = 2Ax + 2Bx - Bx + 2Cx$$
$$0 = A - B - 2C \tag{6.21}$$

planteamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos

$$\begin{aligned} 0 &= A + 2B \\ 1 &= 2A + B + 2C \\ 0 &= A - B - 2C \end{aligned}$$

de donde $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{6}$ y $C = \frac{1}{4}$. Entonces reemplazamos estos valores en (6.18)

$$\frac{x}{(2x-1)(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2}$$

e integramos

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(2x-1)(x+1)^2}dx &= \int \Big(\frac{\frac{1}{3}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2}\Big)dx \\
&= \int \frac{\frac{1}{3}}{2x-1}dx + \int \frac{-\frac{1}{6}}{x+1}dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2}dx \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{2}ln|2x-1| - \frac{1}{6}ln|x+1| + \frac{1}{4}\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C \\
&= \frac{1}{6}ln|2x-1| - \frac{1}{6}ln|x+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + C
\end{aligned}$$

■

Caso 2: Funciones racionales cuyo denominador contiene factores cuadráticos irblackucibles.

Este caso tiene dos formas de resolverse y dependen de si se repiten o no los factores cuadráticos del denominador. Veámoslos.

Caso 2.1: Funciones racionales cuyo denominador contiene factores cuadráticos no repetidos.

Cuando el denominador de la fracción se factoriza y algunos de los factores son cuadráticos irblackucibles no repetidos, descomponemos la fracción algebraica como la adición de dos o más fracciones según el número de factores en el denominador, de tal modo que aquellos que sean cuadráticos irblackucibles tengan en el numerador, polinomios lineales[3]. A continuación exponemos la forma general y damos algunos ejemplos.

Forma general

$$\frac{p(x)}{(b_0x+a_0)(b_1x+a_1)^m...(b_nx^2+a_nx+c)} =$$
$$\frac{A_0}{b_0x+a_0} + \frac{A_1}{b_1x+a_1} + ... + \frac{A_m}{(b_1x+a_1)^m} + ... + \frac{B_nx+A_n}{b_nx^2+a_nx+c}$$

Donde a_0, a_1,..., a_n,b_0, b_1, ... b_n, A_0, A_1, ... ,A_n y B_n son números reales.

[3]Por cada factor cuadrático irblackucible aparece un numerador lineal.

Ejemplo

Resolvamos las siguientes integrales.

a. $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3-x^2+3x-3}dx$

$x^3-x^2+3x-3=(x-1)(x^2+3)$ Factorizamos usando el teorema del residuo o agrupando términos con factor común.

Buscamos expresar a $\dfrac{x-2}{(x-1)(x^2+3)}$ en algo de la forma

$$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+3} \tag{6.22}$$

basados en la factorización. Notemos que en la fracción con denominador lineal el numerador es un número real y en la fracción con denominador cuadrático irblackucible, el numerador es una función lineal.

$$\frac{x-2}{x^3-x^2+3x-3}=\frac{x-2}{(x-1)(x^2+3)}$$

Reescribimos la expresión factorizada.

$$\frac{x-2}{(x-1)(x^2+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

Aplicamos el caso 2.1.

Operamos.

$$\frac{x-2}{(x-1)(x^2+3)}=\frac{A(x^2+3)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+3)}$$

Pasamos a multiplicar.

$$\frac{(x-1)(x^2+3)(x-2)}{(x-1)(x^2+3)}=A(x^2+3)+(Bx+C)(x-1)$$

Simplificamos y operamos a la derecha.

$$\frac{\cancel{(x-1)(x^2+3)}(x-2)}{\cancel{(x-1)(x^2+3)}}=Ax^2+3A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

Agrupamos términos semejantes.

$$x - 2 = (Ax^2 + Bx^2) + (-Bx + Cx) + (-C + 3A)$$

Determinamos el factor común de cada paréntesis.

$$x - 2 = x^2(A + B) + x(-B + C) + (-C + 3A)$$

Igualamos las componentes a lado y lado de la igualdad, según corresponda.

$$\begin{aligned} 0x^2 &= x^2(A + B) \\ x &= x(-B + C) \\ -2 &= -C + 3A \end{aligned}$$

Igualamos los coeficientes respectivamente.

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= -B + C \\ -2 &= -C + 3A \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones encontramos los siguientes valores.

$$A = -\frac{1}{4}; \qquad B = \frac{1}{4}; \qquad C = \frac{5}{4}$$

Reemplazamos estos valores en la expresión (6.22) y resolvemos la integral:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3} = \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}{x^2 + 3}$$

$$\int \frac{x - 2}{x^3 - x^2 + 3x - 3} dx = \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}{x^2 + 3} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}{x^2 + 3} dx &= \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} dx + \int \frac{\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}{x^2 + 3} dx \\ &= \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} dx + \int \frac{\frac{1}{4}x}{x^2 + 3} dx + \int \frac{\frac{5}{4}}{x^2 + 3} dx \\ &= -\frac{1}{4} ln|x - 1| + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} ln|x^2 + 3| + \frac{5}{4\sqrt{3}} arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

■

Caso 2.2: Funciones racionales cuyo denominador contiene factores cuadráticos repetidos.

Cuando el denominador de la fracción se factoriza y algunos de los factores son cuadráticos irblackucibles repetidos, descomponemos la fracción algebraica como la adición de dos o más fracciones según el número de factores en el denominador, de tal modo que aquellos que sean cuadráticos irblackucibles tengan en el numerador, polinomios lineales[4]; y en el caso de los factores cuadráticos irblackucibles repetidos contengan tantos numeradores lineales como indique el exponente del factor repetido. A continuación exponemos la forma general y damos algunos ejemplos.

Forma general

$$\frac{p(x)}{(b_0x+a_0)(b_1x+a_1)^m...(b_nx^2+a_nx+c)(b_px^2+a_px+c)^p} =$$
$$\frac{A_0}{b_0x+a_0}+\frac{A_1}{b_1x+a_1}+...+\frac{A_m}{(b_1x+a_1)^m}+...+\frac{B_nx+A_n}{b_nx^2+a_nx+c}+$$
$$\frac{C_{n_0}x+D_0}{(b_px^2+a_px+c)}+\frac{C_{n_1}x+D_1}{(b_px^2+a_px+c)^2}+...+\frac{C_{n_p}x+D_p}{(b_px^2+a_px+c)^p}$$

Donde a_0, a_1,..., a_n,b_0, b_1, ... b_n, A_0, A_1, ... ,A_n, B_n, D_0, D_1, D_2, ... D_p,C_{n_0}, C_{n_1}, C_{n_2} y C_{n_p} son números reales.

Ejemplo

Resolvamos las siguientes integrales.

$$\int \frac{-3}{x^5-x^4+4x^3-4x^2+4x-4}dx$$

$x^5-x^4+4x^3-4x^2+4x-4 =$ $(x^2+2)^2(x-1)$	Factorizamos usando división sintética y el teorema del residuo.

Buscamos expresar a

$$\frac{-3}{(x^2+2)^2(x-1)}$$

en algo de la forma

$$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2} \tag{6.23}$$

[4]Por cada factor cuadrático irblackucible aparece un numerador lineal.

Notemos que en la fracción con denominador lineal el numerador es un número real, y como hay un factor cuadrático irblackucible en el denominador $(x^2+2)^2$, entonces se escriben dos fracciones con numerador lineal y denominadores, cuyos exponentes van aumentando hasta el exponente del factor irblackucible.

Reescribimos la expresión factorizada.

$$\frac{-3}{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4} = \frac{-3}{(x^2+2)^2(x-1)}$$

Aplicamos el caso 2.2.

$$\frac{-3}{(x^2+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

Operamos.

$$\frac{-3}{(x^2+2)^2(x-1)} =$$

$$\frac{A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+2) + (Dx+E)(x-1)}{(x^2+2)^2(x-1)}$$

Pasamos a multiplicar.

$$\frac{-3(x^2+2)^2(x-1)}{(x^2+2)^2(x-1)} =$$

$$A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+2) + (Dx+E)(x-1)$$

Simplificamos y operamos a la derecha.

$$\frac{-3\cancel{(x^2+2)^2(x-1)}}{\cancel{(x^2+2)^2(x-1)}} =$$

$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^4 + 2Bx^2 - Bx^3 - 2Bx + Cx^3 + 2Cx - Cx^2 - 2C + Dx^2 - Dx + Ex - E$

Agrupamos términos semejantes.

$-3 = (Ax^4 + Bx^4) + (-Bx^3 + Cx^3) + (4Ax^2 + 2Bx^2 - Cx^2 + Dx^2) + (-2Bx+$

$2Cx - Dx + Ex) + (4A - 2C - E)$

Determinamos el factor común de cada paréntesis.

$-3 = x^4(A+B)+x^3(-B+C)+x^2(4A+2B-C+D)+x(-2B+2C-D+E)+(4A$

$-2C - E)$

Igualamos las componentes a lado y lado de la igualdad, según corresponda.

$$\begin{aligned}
0 \cdot x^4 &= x^4(A+B)\\
0 \cdot x^3 &= x^3(-B+C)\\
0 \cdot x^2 &= x^2(4A+2B-C+D)\\
0 \cdot x &= x(-2B+2C-D+E)\\
-3 &= 4A-2C-E
\end{aligned}$$

Igualamos los coeficientes respectivamente.

$$\begin{aligned}
0 &= A+B\\
0 &= -B+C\\
0 &= 4A+D-C+2B\\
0 &= -2B+2C-D+E\\
-3 &= 4A-2C-E
\end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones encontramos los siguientes valores.

$$A = -\frac{1}{3}; \qquad B = \frac{1}{3}; \qquad C = \frac{1}{3}; \qquad D = 1; \qquad E = 1$$

Reemplazamos estos valores en la expresión (6.23) y resolvemos la integral:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2} = \frac{-\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+2} + \frac{x+1}{(x^2+2)^2}$$

$$\int \frac{-3}{x^5-x^4+4x^3-4x^2+4x-4}dx = \int \frac{-\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+2} + \frac{x+1}{(x^2+2)^2}dx$$

$$\int \frac{-\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+2} + \frac{x+1}{(x^2+2)^2}dx = \int \frac{-\frac{1}{3}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+2}dx + \int \frac{x+1}{(x^2+2)^2}dx$$

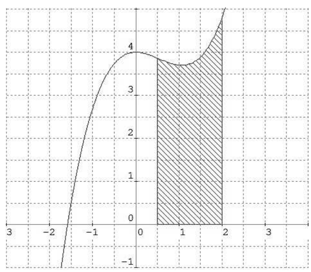
$$= \int \frac{-\frac{1}{3}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{3}x}{x^2+2}dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x^2+2}dx + \int \frac{x}{(x^2+2)^2}dx + \int \frac{1}{(x^2+2)^2}dx$$
$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+2}dx + \int \frac{x}{(x^2+2)^2}dx + \int \frac{1}{(x^2+2)^2}dx$$
$$= -\frac{1}{3}ln|\ x-1\ | + \frac{1}{6}ln|\ x^2+2\ | + \frac{\sqrt{2}}{6}arcotan\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big) - \frac{1}{2}(x^2+2)^{-1} +$$
$$\frac{\sqrt{2}}{16}sen^2\Big(arctan\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)\Big) + \frac{\sqrt{2}}{8}arctan\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big) + C$$

Ha de tenerse en cuenta que la solución contiene funciones trigonométricas inversas; sin embargo, éstas pueden obtenerse de las tablas de integrales trigonométricas. ■

Ahora que reconocemos los métodos de integración, vamos a analizar la integral como el área bajo la curva de una función, veamos.

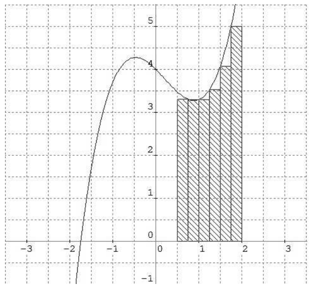
6.4. Interpretación geométrica de la integral definida

Consideremos la función $f(x)$, continua en el intervalo $[a, b]$, que se observa en la figura 6.3. Notemos que entre la función y el eje X se forma una región a la que podemos calcularle el área; veamos cómo determinar dicho valor.



Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con la misma longitud $\triangle x = \frac{b-a}{n}$, adicionalmente, tomamos como puntos representativos a los límites inferiores de cada subintervalo, evidenciando entonces, que cada subintervalo forma la base de rectángulos cuyas alturas corresponden a la imagen de cada punto representativo. Con base en esto, el área de cada rectángulo será $base \times altura = \triangle x \times f(x_i)$ donde $i = 0, 1, 2, ...$ y x_i corresponde al límite inferior de cada subintervalo. De este modo el área total aproximado de la región entre la curva y el eje X es:

$$\text{Área} = \triangle x \times f(x_0) + \triangle x \times f(x_1) + \triangle x \times f(x_2) + \ldots \triangle\, x \times f(x_n - 1)$$



A pesar de la división del intervalo en pequeños subintervalos notamos que no cubrimos la región totalmente, sin embargo, entre más divisiones hagamos más área cubriremos; para que esto suceda necesitamos que n tienda a infinito de tal modo que $\triangle x$ tienda a cero. Con esto cubrimos toda la región y obtenemos el valor del área.

Área $= \lim_{n\to\infty} \triangle x \times f(x_0) + \triangle x \times f(x_1) + \triangle x \times f(x_2) + \ldots \triangle\, x \times f(x_n - 1) = \int_a^b f(x)dx$

Esta integral se conoce con el nombre de integral definida y se calcula según el teorema fundamental del cálculo como se indica a continuación.

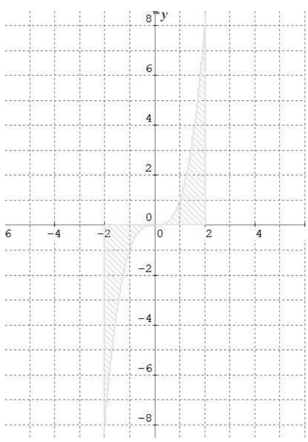
Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

con $F(x)$ cualquier antiderivada de $f(x)$.

Ejemplo

Calculemos el área de la región entre la función $f(x) = x^3$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$.



Para calcular el área debemos tener en cuenta que en el intervalo $[-2,0]$ la región está en la parte inferior del eje x, por lo que el valor dará negativo. Como consecuencia es necesario sacar el valor absoluto de la integral correspondiente a ésta, porque no es posible que un área tome un valor negativo.

$$\begin{aligned}\Big|\int_{-2}^{0} x^3dx\Big| + \int_{0}^{2} x^3dx &= \Big|\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}\Big| + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}\\ &= \Big|\frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4}\Big| - \Big(\frac{0^4}{4} - \frac{2^4}{4}\Big)\\ &= |-4| + 4\\ &= 8\end{aligned}$$

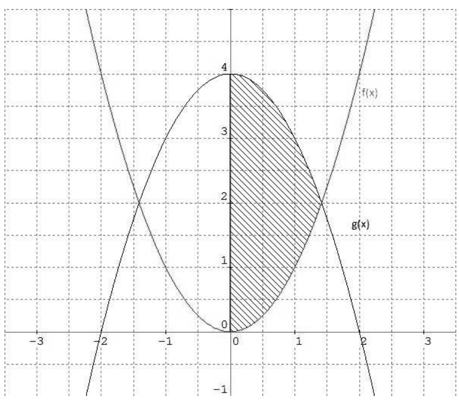
De este modo concluimos que el área entre la función x^3 y el eje x en el intervalo $[-2,2]$ es 8 unidades cuadradas. ■

Es importante en el caso del cálculo de áreas separar la integral en los intervalos que sean necesarios, para no caer en un error al momento de hallar el valor de la integral. Dicha división o separación se realiza cuando parte de la región se encuentra en la regió inferior del eje X.

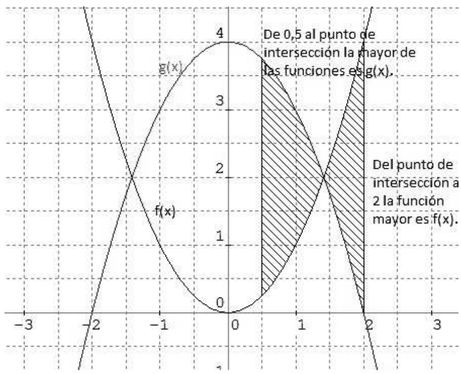
6.5. Área entre curvas

Cuando tenemos dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ tales que $f(x) < g(x)$ para todo x en el intervalo $[a,b]$ el área que acotan las funciones se calcula de la siguiente manera.

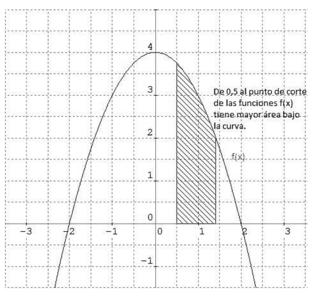
$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

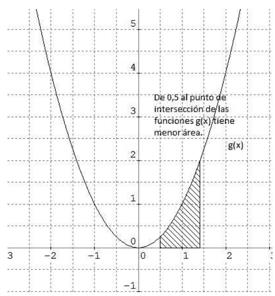


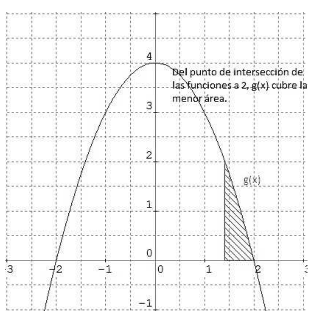
Debe notarse que si en un intervalo dado las funciones se cortan, es necesario dividir o separar la integral de área en tantas integrales como intervalos defina la separación. Esto se debe a que el orden de las funciones cambia, puede ser que $f(x)$ sea menor que $g(x)$ en cierta parte del intervalo, mientras $g(x)$ es mayor que $f(x)$ en otra parte del intervalo. Adicionalmente, puede suceder que en cierta parte del intervalo sólo pblackomine una de las funciones y como consecuencia no debe realizarce una diferencia sino sencillamente el cálculo de un área entre la función y el eje X. Observemos la siguiente gráfica.

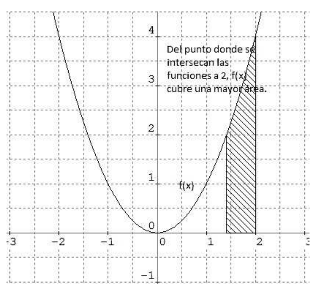


Para identificar qué función es mayor, es aconsejable sombrear el área que forman cada una de las funciones con el eje x; aquella que cubra una mayor superficie será la mayor.





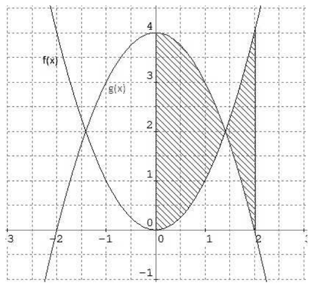




Ejemplo

Determinemos el valor del área que acotan las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4 - x^2$ en el intervalo $[0, 2]$.

Como en el intervalo $[0, 2]$ observamos que las funciones se cortan, debemos separar la integral porque de 0 al punto de intersección, $g(x)$ es mayor que $f(x)$ pero del punto de intersección a 2, $f(x)$ es mayor que $g(x)$.



Para determinar el punto de intersección de $f(x)$ con $g(x)$ igualamos las funciones y determinamos el valor de x:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 &= 4 - x^2 \\ x^2 + x^2 &= 4 \\ 2x^2 &= 4 \\ x^2 &= \frac{4}{2} \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Así el valor del área es:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sqrt{2}} (g(x) - f(x))dx + \int_{\sqrt{2}}^2 (f(x) - g(x))dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} (4 - x^2 - x^2)dx + \int_{\sqrt{2}}^2 (x^2 - (4 - x^2))dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2)dx + \int_{\sqrt{2}}^2 (2x^2 - 4)dx \\ &= 4x - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{2}} + \frac{2}{3}x^3 - 4x\Big|_{\sqrt{2}}^2 \\ &= \left(4(\sqrt{2}) - \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3\right) - \left(4(0) - \frac{2}{3}(0)^3\right) + \left(\frac{2}{3}(2)^3 - 4(2)\right) - \left(\frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 - 4(\sqrt{2})\right) \\ &= 4\sqrt{2} - \tfrac{4}{3}\sqrt{2} + \left(\frac{16}{3} - 8\right) - \frac{4}{3}\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$= 8\sqrt{2} + \left(\frac{-8}{3}\right) - \frac{8}{3}\sqrt{2}$
$= \frac{16}{3}\sqrt{2} - \frac{8}{3}$

Luego, el valor del área entre las curvas es $\frac{-16}{3}\sqrt{2} + \frac{8}{3}$ unidades cuadradas. ■

6.6. Análisis de situaciones

Existen diversas aplicaciones del concepto de integral; puede suceder que una empresa conozca los datos de variación de los costos, ingresos y ganancias respecto a las unidades producidas, vendidas y ambas, respectivamente, pero que no conozca las funciones que modelan estas variaciones. Como consecuencia se tendría interés en conocer dichas funciones con el fin de realizar proyecciones e identificar el comportamiento general de las mencionadas según el número de unidades producidas, vendidas y ambas. Para ello, tan sólo tendríamos que integrar dichas variaciones más conocidas como funciones marginales o derivadas como se les llama en matemáticas.

Situación 1:

Una empresa encuentra que su ingreso marginal respecto a las unidades vendidas esta modelado por la función $f(x) = 6x^2 - 3x$. Determinemos la función de ingresos de la empresa si cuando se venden 10 unidades los ingresos son de 1850 unidades monetarias[5], luego, encontremos de cuánto son los ingresos si el número de unidades vendidas es 25.

Como sabemos, el ingreso marginal es la derivada de la función de ingresos de la empresa. Por tanto, para determinar la función de ingresos debemos hallar la antiderivada de $f(x) = 6x^2 - 3x$, es decir, necesitamos integrar:

$$\int (6x^2 - 3x)dx = \frac{6}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C.$$

Esto significa que[6] $I(x) = \frac{6}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$.

A pesar de haber establecido la estructura de la función de ingresos necesitamos conocer el valor de la constante C para obtener la función específica para la empresa; dicho valor podemos establecerlo con la información que al vender 10 unidades los ingresos son de 1 850 unidades monetarias. Veamos como:

[5]Se escribe unidades monetarias para no clasificar el contexto en un sólo país; podrían se pesos colombianos, dólares u otra unidad monetaria.

[6]Denotamos por $I(x)$ a la función de ingresos: dinero recibido por la venta de x unidades.

$I(10) = 2(10)^3 - \frac{3}{2}(10)^2 + C$	Reemplazamos x por 10 que son las unidades vendidas.
$1850 = 2(10)^3 - \frac{3}{2}(10)^2 + C$	Reemplazamos $I(10)$ por 1850 que son los ingresos recibidos por la venta de 10 unidades.
$1850 = 2000 - 150 + C$	Operamos.
$1850 - 2000 + 150 = C$	Despejamos la constante.
$0 = C$	Operamos.

Por lo anterior, la función de ingresos de la empresa es:

$$I(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2.$$

Para hallar el valor de los ingresos al vender 25 unidades reemplazamos x por 25 en $I(x)$:

$$I(25) = 2(25^3) - \frac{3}{2}(25^2) = \frac{60\ 625}{2} \approx 30\ 312,5$$

Lo cual significa que al producir y vender 25 unidades, la empresa recibe aproximadamente $30\ 312,5$ unidades monetarias.

Situación 2:

Cierta empresa produce arroz y el costo marginal por kilo de arroz está dado por la expresión $\dfrac{dC}{dx} = 0,09x^2 - 1,2x + 4,5$ donde x representa los kilos de arroz. ¿Cuál es la función que modela los costos de la empresa si al producir 10 kilos el costo es de 17 dólares?

Como podemos observar tenemos la función que modela los costos marginales o la variación de los costos respecto a las unidades producidas; por ende, tan solo debemos integrar dicha función y con la condición dada, determinar el valor de la constante C que nos da la función particular de la empresa. Veamos.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dC}{dx}dx &= \int 0,09x^2 - 1,2x + 4,5dx \\
&= \frac{0,09}{3}x^3 - \frac{1,2}{2}x^2 + 4,5x + C \\
&= 0,03x^3 - 0,6x^2 + 4,5x + C
\end{aligned}$$

Luego, la función de costos está dada por la expresión

$$C(x) = 0,03x^3 - 0,6x^2 + 4,5x + C$$

falta determinar el valor de la constante C sustituyendo en ella los datos dados en el problema.

$C(10) = 0,03(10)^3 - 0,6(10)^2 + 4,5(10) + C$	Reemplazamos x por 10 que son las unidades vendidas.
$17 = 0,03(10)^3 - 0,6(10)^2 + 4,5(10) + C$	Reemplazamos $C(10)$ por 17 que son los costos de producir 10 unidades.
$17 = 30 - 60 + 45 + C$	Operamos.
$17 - 15 = C$	Despejamos la constante.
$2 = C$	Operamos.

Como consecuencia la función que modela los costos de la empresa es

$$(x) = 0,03x^3 - 0,6x^2 + 4,5x + 2.$$

Otra pregunta que podríamos plantear en este ejercicio es: ¿en cuánto cambian los costos de la empresa al producir de 3 a 6 unidades? Esta pregunta se responde al resolver una integral definida; hasta ahora sólo habíamos presentado situaciones que requerían hallar una integral indefinida, pero cabe resaltar este tipo de preguntas porque lo que haríamos, usualmente, es que al tener la función de costos de la empresa determinaríamos los costos de producir 6 y 3 unidades para luego sustraer y determinar el cambio en los costos. Si observamos detenidamente, lo que hacemos es utilizar el teorema fundamental del cálculo que nos dice que

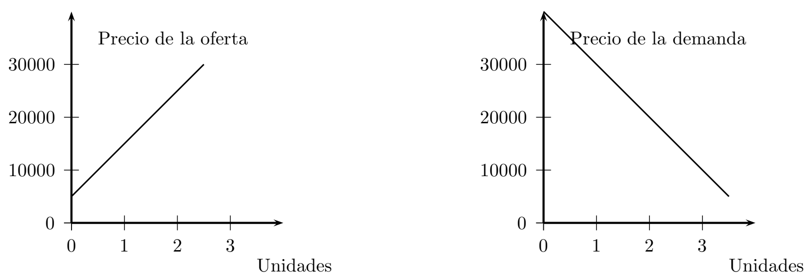
$$\int_3^6 \frac{dC}{dx}dx = C(x)\Big|_3^6 = C(6) - C(3) = 16,58 - 10,91 = 5,67$$

Esto significa que los ingresos aumentan en 5,67 dólares cuando se producen de 3 a 6 unidades. En caso de que el valor de la integral definida fuera negativo concluiríamos que los costos disminuyeron la cantidad que resulta de la integral. Veamos ahora en qué casos se utiliza el concepto de área entre curvas en situaciones del área empresarial.

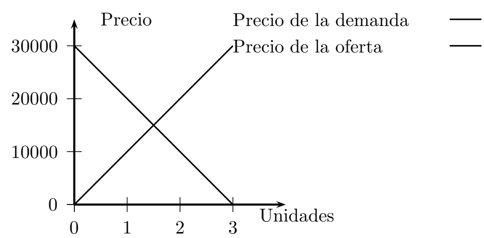
Situación 3:

La demanda y la oferta son conceptos propios de la economía que pueden modelarse al igual que los ingresos, costos y ganancias por medio de funciones matemáticas. En el mercado la ley de la demanda hace referencia a la relación que hay entre el precio de un artículo y las unidades que se consumen a dicho valor; entre más costoso sea un artículo menos unidades adquieren los consumidores. Por lo anterior, la demanda modela el comportamiento del precio de un artículo respecto al número de unidades demandadas por los consumidores.

De forma análoga existe la ley de la oferta, entre más alto sea el precio de un artículo más unidades está dispuesto a elaborar el productor; entonces la oferta modela el comportamiento del precio de un artículo respecto al número de unidades que estaría dispuesto a vender un productor a dicho precio[7]. En las siguientes gráficas se observa el comportamiento de una función lineal que modela el comportamiento de la oferta y la demanda de un determinado artículo.



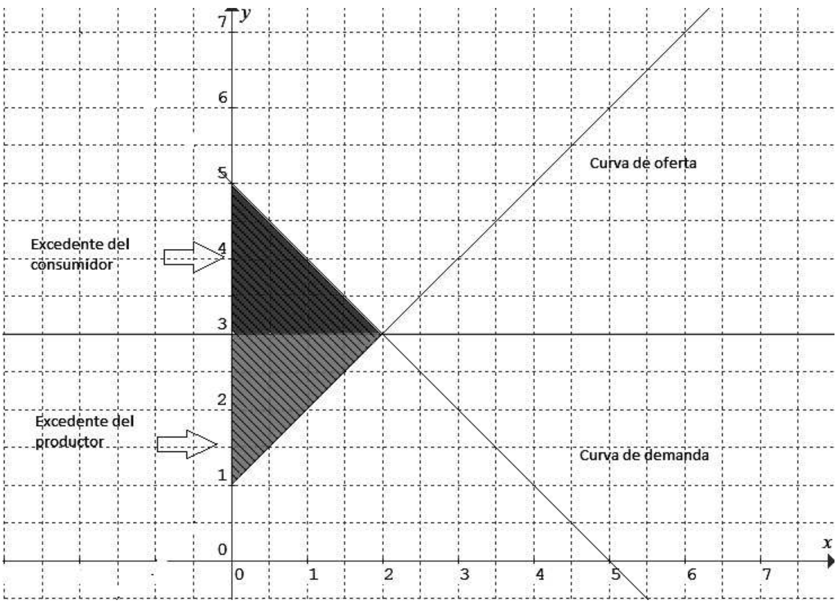
Cuando un artículo se encuentra en el mercado existe un precio llamado, precio de equilibrio, que indica el valor al cual el consumidor y el productor están dispuestos a comprar y vender, de tal forma que ambos se sientan satisfechos por la negociación.



[7]Esta es una breve idea de la ley de la demanda y de la oferta. Para mayor profundización se puede consultar cualquier libro de microeconomía que describe con mayor precisión estos conceptos

Dicho precio de equilibrio nos plantea dos situaciones a analizar: la primera de ellas es que a pesar de haber un precio de equilibrio existen personas dispuestas a vender a un mayor valor y la segunda, es que existen consumidores dispuestos a comprar a un menor precio.

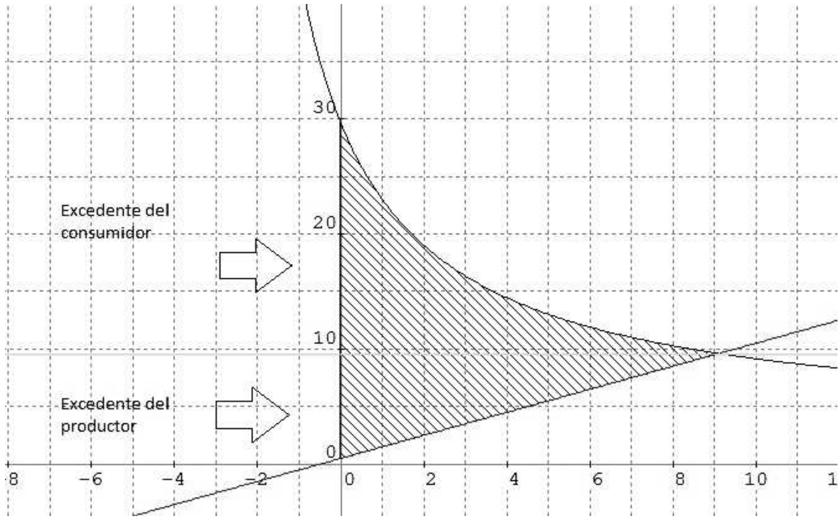
La región sobre la curva de la oferta hasta el precio de equilibrio se conoce, como el excendente del consumidor, porque la cantidad demandada excede a la cantidad ofrecida, esto significa que hay un exceso de demanda o escasez, mientras que la región bajo la curva de demanda hasta el precio de equilibrio, representa el excedente del productor, porque el alto precio del artículo desanima a los consumidores en la compra estando dispuestos los productores a venderlas para obtener más utilidades (hay un exceso en la oferta).



Como en ambos casos el exceso se representa por una región entre curvas, nos encontramos en una situación que puede resolverse calculando una integral. Veamos el siguiente contexto.

Deteminemos el excedente del productor y del consumidor si la función de demanda y de oferta de cierto producto estuviera dada por la expresión $P_d(x) = \dfrac{80}{x+3} + 3$ y $P_o(x) = x + \dfrac{1}{2}$, respectivamente.

Para resolver este tipo de situaciones sugerimos representar gráficamente la oferta y la demanda con el fin de ver, más claramente, la región a integrar.



En la figura notamos que es necesario determinar el valor de x para el cual las funciones de oferta y demanda son iguales; calcular dicho valor significa hallar el número de unidades con el cual se logra el punto de equilibrio.

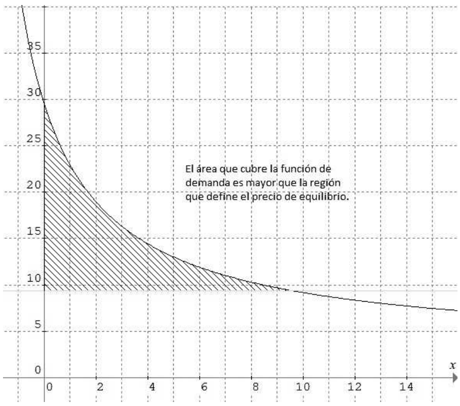
$$
\begin{aligned}
P_o(x) &= P_d(x)\\
x + \frac{1}{2} &= \frac{80}{x+3} + 3\\
\frac{80}{x+3} &= x + \frac{1}{2} - 3\\
\frac{80}{x+3} &= x - \frac{5}{2}\\
80 &= \left(x - \frac{5}{2}\right)(x+3)\\
0 &= x^2 + \frac{x}{2} - \frac{175}{2}\\
0 &= 2x^2 + x - 175
\end{aligned}
$$

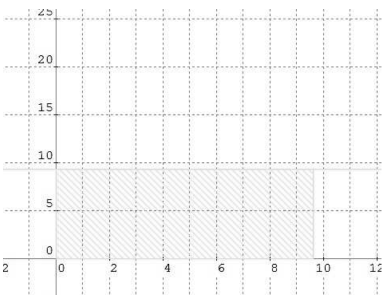
$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1401}}{4} \approx 9,11\\
x_2 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1401}}{4} \approx -9,61
\end{aligned}
$$

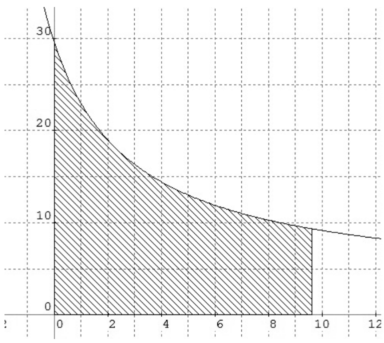
Como x representa el número de unidades vendidas tan sólo consideramos el valor $9,11$ y con él comenzaremos el proceso de integración para determinar el excedente del consumidor y del productor.

Excedente del consumidor

Observemos la ilustración para plantear adecuadamente la integral.





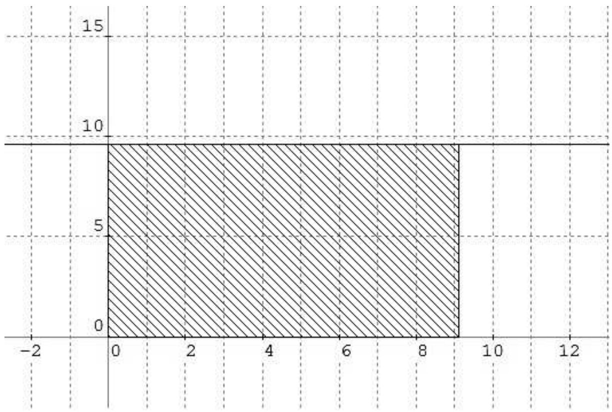


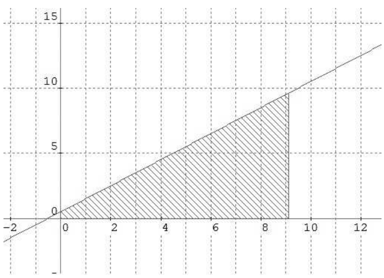
Luego de ver las gráfivas procederemos a realizar la integral

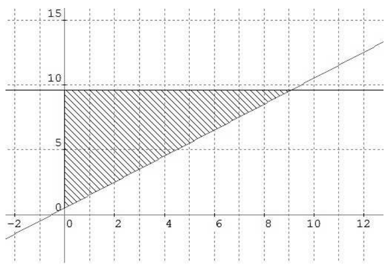
$$\begin{aligned}
E_c &= \int_0^{9,1} \Big(\frac{80}{x+3} + 3 - 9,1\Big)dx \\
&= \int_0^{9,1} \Big(\frac{80}{x+3} - 6,1\Big)dx \\
&= 80\int_0^{9,1} \frac{1}{x+3}dx - 6,1\int_0^{9,1} dx \\
&= 80ln|x+3|\Big|_0^{9,1} - 6,1x\Big|_0^{9,1} \\
&= 80ln|9,1+3| - 80ln|3| - (6,1)(9,1) \\
&\approx 56,057
\end{aligned}$$

Excedente del productor

Observemos la ilustración para plantear adecuadamente la integral.







Luego de analizar las gráficas procedemos a realizar la integral

$$\begin{aligned}
E_p &= \int_0^{9,1} 9,1 - \Big(x + \frac{1}{2}\Big) dx \\
&= \int_0^{9,1} 8,6 - x dx \\
&= 8,6x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{9,1} \\
&= 782,6 - 41,405 \\
&\approx 741,195
\end{aligned}$$

6.7. Actividades de práctica

1. El costo marginal de cierta empresa está dado por la expresión

$$\frac{dC(x)}{dx} = x^2 - 18x + 80$$

donde x es el número de unidades producidas. Con base en esta información responda.

a. ¿Cuál es la función que modela los costos de la empresa? ______

______

b. ¿Cuál es la función de costos si al producir 3 unidades el costo es de 206 dólares? ______

______

c. ¿Cuáles son los costos de la empresa al producir 6 unidades? ______

______

2. Si el valor marginal de cierta propiedad está dado por la expresión

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{2}{t^2},$$

donde t mide los años de construcción de la propiedad, y $V(t)$ el valor de dicha propiedad en el instante t (en millones de pesos), determine:

a. La función que modela el valor de la propiedad.

b. La función que modela el valor de la propiedad si el precio de la propiedad se estabiliza en $30 000 000 al trascurrir los años.

c. El valor de la propiedad 10 años después de construida.

3. Si la utilidad marginal de producir x unidades de cierto artículo es de 3 000 unidades monetarias, analice:

a. ¿Cuál es la función que modela las utilidades de la empresa? ______

______

b. ¿Cuál es la función de utilidades si los costos fijos son de 2 000 000 de unidades monetarias? ______

______

c. ¿Cuántas unidades se deben producir y vender para que las utilidades sean de 1 000 000 de unidades monetarias? ______

______

4. La prima de un seguro de vida, se fija de tal manera que la variación del monto recibido por el beneficiario está dada por la expresión

$$\frac{dP}{dt} = -400e^{-2t},$$

donde t representa los días que han transcurrido a partir del siniestro. Con base en esto determine:

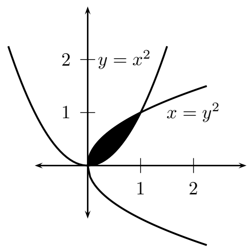
   a. La función que modela el monto recibido por el beneficiario.

   b. La función que modela el monto recibido por el beneficiario si al transcurrir el tiempo tiende a estabilizarce en 500 unidades monetarias.

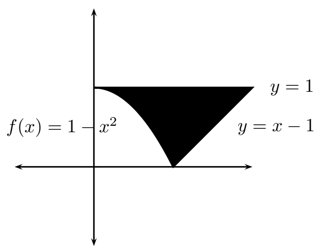
   c. El monto que recibe el beneficiario 2, 4, 6, 8 y 10 años después del siniestro.

5. Calcule el área de cada una de las siguientes regiones.

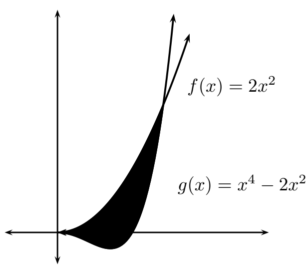
a.



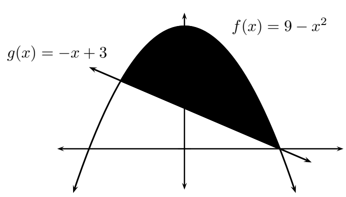
b.



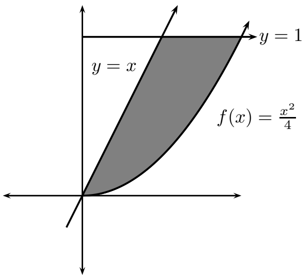
c.



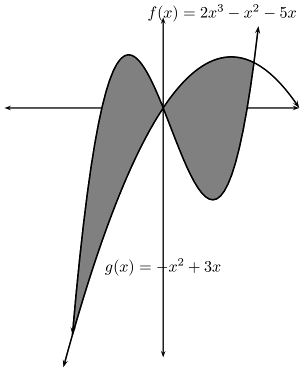
d.



e.



f.



6. Para las siguientes funciones de demanda y oferta determine el excedente de cada una.

   a. $P_o(x) = 3x + 2$; $P_d(x) = -x^2 + 20$
   b. $P_o(x) = 2x + 10$; $P_d(x) = -x^2 + 25$
   c. $P_o(x) = x^4 + 2$; $P_d(x) = -250x + 2000$
   d. $P_o(x) = \dfrac{10}{7}x + \dfrac{20}{7}$; $P_d(x) = -2x^2 + 60$

7. La función de ingreso marginal, por unidad adicional, producida por una fábrica de calcetines está dada por $\frac{dI}{dx} = 0{,}3x^2 + 3x + 1$ donde x represénta el número de unidades producidas.

   a. ¿Cuál es la función que modela el ingreso de la fábrica? ____________________
   ____

   b. ¿Cuál es el ingreso adicional si la fábrica pasa de producir 100 unidades a producir 101?

   ____
   ____

8. En una fábrica el costo marginal es de $c(q) = 6(q - 5)^2$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es de q unidades. ¿En cuánto aumentará el costo total de producción si el nivel de producción aumenta de 10 a 13 unidades? ______________________________
   ____

9. Un pozo petrolero que produce en promedio 42 barriles de petróleo crudo al día se agotará dentro de 3 años. Un estudio económico ha determinado

que dentro de t meses el precio del petróleo será $70 + 0,09\sqrt{t}$ dólares el barril. Suponiendo que el petróleo acumulado en la producción mensual se vende totalmente al precio de mercado en ese momento, ¿cuál será el ingreso total futuro obtenido en la venta del petróleo extraído del pozo?

Bibliografía

[1] Haeussler, Ernest F. y Paul, Richard S. (2003). *Matemáticas para administración y economía*. México: Pearson.

[2] Sydsaeter, Knut. y Hammond, Peter. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Madrid Prentice Hall.

[3] Stewart, James. y Lothar, Redlin. (2007). *Précalculo matemáticas para el cálculo*. Colombia: Thomson.

[4] Ernest F., H. y Richard S., P. (2003). *Matemáticas para administración y economía*(10 ed.). México: Pearson Educación.

[5] Castro Pérez, Jaime, Pérez Castro y González Nucamendi, Andrés. (2002). *Problemario de matemáticas para administración y economía*. Thomson.

[6] Arya J.C. y Lardner R.W. (2001). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía* (4 ed.). México: Pearson Educación.

[7] Tang T.S. (2005). *Matemáticas para administración y economía* (3 ed.). México: Cengage Learning Latin America.

[8] Purcell E. J., Varberg D. y Rigdon S. (2007). *Cálculo diferencial e integral* (9 ed.). México: Cengage Learning Latin America.

[9] Thomas, G.B., Finney R. L. (1998). *Cálculo: una variable* (9 ed.). México: Pearson Educación.

[10] Keila, M.A.,(2002). *Aplicación de la matemática a la economía.* Venezuela: Universidad de Los Andes.